Prof. Dr. Lars Diening
Sebastian Schwarzacher
Maximilian Wank 5.10.2013

Analysis einer Veränderlichen — Präsenzaufgaben 3

Aufgabe 1:
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Finden Sie Nullfolgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = 1$ und

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_n}{a_n} = \infty$.

Aufgabe 2:
Man gebe Beispiele für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass

(a) die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, aber eine konvergente Teilfolge hat,

(b) die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und mehrere Häufungspunkte hat,

(c) die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k} < \limsup\limits_{n\to\infty} c_n$ hat und

(d) die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich viele Häufungspunkte hat.

Aufgabe 3:
Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv über $a_1 := 10$ und

$$a_{n+1} := \frac{2a_n^3 + 3}{3a_n^2}.$$

Beweisen Sie zunächst die Konvergenz der Folge. Bestimmen Sie danach den Grenzwert.

Aufgabe 4:
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.