Prof. Dr. Lars Diening
Dr. Sebastian Schwarzacher
Maximilian Wank 28.01.2014

Analysis einer Veränderlichen — Übungsblatt 11

Aufgabe 1: **(1,5+1+1,5+1) Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, wenn diese existieren.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2}{1-\cos(x)}, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\tan(x)}, \quad \lim_{x\to\infty} (1+x)^{-\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

Aufgabe 2: **(2+2+2) Punkte**

Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \text{ wenn } x > 0 \text{ und } f(x) = 0 \text{ wenn } x \leq 0.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion ist stetig in $\mathbb{R}$.

(b) Die Funktion ist stetig differenzierbar in $\mathbb{R}$

(c) Die Funktion ist konvex in einer Umgebung um 0.

Aufgabe 3: **1 Punkt**

Es sei $A \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $f : A \to \mathbb{R}$ konvex, so gilt für $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ und $x_1, ..., x_n \in A$

$$f\Big(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\Big) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Es seien $x_1, ...x_n \in [0,\infty)$. Zeigen Sie, dass für $\alpha, \beta \in [0,\infty)$, mit $\alpha < \beta$

$$\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^\alpha\Big)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^\beta\Big)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Aufgabe 5: **(2+2+2) Punkte**

(a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn für alle $a < x < b$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

(b) Zeigen Sie, dass konvexe Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig sind.

(c) Zeigen Sie, dass konvexe Funktionen auf $\mathbb{R}$ eine linkseitige und eine rechtseitige Ableitung besitzen und $(f')^-(x) \leq (f')^+(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Abgabe bis Dienstag, den 04.02.2014 um 16:00 Uhr