Prof. Dr. Lars Diening
Dr. Sebastian Schwarzacher
Maximilian Wank 21.01.2014

Analysis einer Veränderlichen — Übungsblatt 11

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir den Epigraph durch

$$\operatorname{epi} f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq f(x)\}.$$

Beweisen Sie, dass f genau dann eine konvexe Funktion ist, wenn der Epigraph eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 2: **(2+2) Punkte**

Für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion $h_1 : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ ist konvex.

(b) Die Funktion $h_2 : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$ ist konvex.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ n-fach differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie, dass dann fg ebenfalls n-fach differenzierbar ist und der Gleichung

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

genügt.
Hinweis: Sie dürfen die Formel $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ sowie die Konventionen $\binom{n}{k} := 0$ für $k < 0$ oder $k > n$ und $\binom{0}{0} := 1$ verwenden.

Aufgabe 4: **(2+2) Punkte**

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Ist $f'(a) > 0$ so existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $f(x) > f(a)$ für alle $x \in (a, a + \varepsilon)$.

(b) Für alle $x \in I$ gelte $f'(x) \neq 0$. Dann ist entweder $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$.

Aufgabe 5: **(2+2) Punkte**

(a) Untersuchen Sie die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ auf Monotonie.

(b) Folgern Sie $2^\pi < \pi^2$.

Abgabe bis Dienstag, den 28.01.2014 um 16:00 Uhr