Prof. Dr. Lars Diening
Dr. Sebastian Schwarzacher
Maximilian Wank 09.01.2014

Analysis einer Veränderlichen — Übungsblatt 9

Aufgabe 1: **(1+1+1+1) Punkte**

Beweisen Sie für alle $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ die Rechenregeln

(a) $a^x a^y = a^{x+y}$,

(b) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,

(c) $a^x b^x = (ab)^x$ und

(d) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$.

Benutzen Sie hierbei die Definition $a^x := \exp(x \log(a))$.

Aufgabe 2: **(1,5+1,5) Punkte**

Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : A \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in A$ differenzierbar mit $A \subset \mathbb{R}$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $f + g$ und cf in x_0 differenzierbar sind und es gilt:

(a) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ und

(b) $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.

Aufgabe 3: **(2+1) Punkte**

Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} m_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

ein Monom n-ter Ordnung und für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} p_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

ein reelles Polynom n-ter Ordnung. Beweisen Sie

(a) $m_n'(x_0) = n x_0^{n-1}$ und

(b) $p_n'(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} k a_k x_0^{k-1}$,

wobei Sie in Teilaufgabe (b) die Ergebnisse aus Aufgabe 2 ohne Beweis verwenden dürfen.

Abgabe bis Dienstag, den 14.01.2014 um 16:00 Uhr