Prof. Dr. Lars Diening
Dr. Sebastian Schwarzacher
Maximilian Wank 3.12.2013

Analysis einer Veränderlichen — Übungsblatt 7

Aufgabe 1: **(1+2+1) Punkte**

Es sei (X, d_X) ein metrischer Raum sowie $A, B \subseteq X$ nicht leer. Beweisen Sie

(a) $x \in X \setminus \overline{A} \iff \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$,

(b) $X \setminus (A^\circ) = \overline{X \setminus A}$ und

(c) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Aufgabe 2: **(1,5+1,5) Punkte**

Es sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} d_{X\times X} : (X \times X) \times (X \times X) &\to \mathbb{R} \\ ((a,b),(c,d)) &\mapsto d_X(a,c) + d_X(b,d). \end{aligned}$$

(a) Beweisen Sie, dass $d_{X\times X}$ eine Metrix auf $X \times X$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} d_X : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (a,b) &\mapsto d_X(a,b) \end{aligned}$$

bezüglich $d_{X\times X}$ stetig ist.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik, $d(x,y) := \|x - y\|_2$ (alternativ können Sie auch $\|x - y\|_1$ oder $\|x - y\|_\infty$ nehmen). Sei $\overline{B}_r(x_0) := \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$ und sei $\overline{B_r(x_0)}$ der Abschluss von $B_r(x_0) := \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$. Beweisen Sie

$$\overline{B}_r(x_0) = \overline{B_r(x_0)}.$$

Aufgabe 4: **(2+1) Punkte**

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ sowie $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig.

(a) Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, also die Existenz eines $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \xi$.

(b) Finden Sie eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die keinen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 5: **3 Punkte**

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ nicht leer und $x \in X$. Wir definieren den Abstand eines Punktes zu einer Menge durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Beweisen Sie $\operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{dist}(x, \overline{A})$.

Bitte wenden!

Aufgabe 6: **(2+2) Punkte**

Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$. Beweisen Sie die Äquivalenz

$$f \text{ stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A \subseteq X : f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Zusatzaufgabe 7: **(5 Sonderpunkte)**

Wir betrachten folgendes Spiel: Das Spielbrett ist das Gitter $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Zu Beginn liegen in der unteren Halbebene überall Spielsteine, d.h. auf den Gitterpunkten (j, k) mit $k \leq 0$. Die restlichen Felder sind leer.
Es gibt folgende Regel: Man darf einen Stein in horizontaler oder vertikaler Richtung versetzen indem man über genau einen anderen horizontal bzw. vertikal benachbarten Spielstein auf das dahinterliegende freie Feld springt. Nach dem Sprung ist der übersprungene Stein zu entfernen. Beispiel: Zu Beginn kann der Stein auf Position $(0, -1)$ über den Stein auf Position $(0, 0)$ auf die neue Position $(0, 1)$ springen. Anschließend muss der Stein auf Position $(0, 0)$ entfernt werden.
Ziel des Spieles ist es einen Stein möglichst hoch zu bringen, also in eine Position (j, k) mit k möglichst groß.
Frage: Was ist die maximale Höhe die man mit einem Spielstein nach endlich vielen Sprüngen erreichen kann?
Hinweis: Man ordne jedem Gitterpunkt (j, k) eine Zahl (Energie) zu, welche von $(|j|, k)$ abhängt. Die Energie sei so gewählt, dass a) die Gesamtanfangsenergie der Spielsteile endlich ist (Stichwort: Geometrische Reihe!) und b) die Gesamtenergie bei jedem Zug monoton fallend ist.