Prof. Dr. Lars Diening
Dr. Sebastian Schwarzacher
Maximilian Wank 26.11.2013

Analysis einer Veränderlichen — Übungsblatt 6

Aufgabe 1: **(2+2+2+2) Punkte**

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig sind

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$

(c) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

(d) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\sqrt{x} + 10)^3(1 - \frac{5}{x})$

Aufgabe 2: **(2+1+2+2) Punkte**

Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Es sein $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ steitig. Zeigen sie, dass die Abbildungen

(a) $x \mapsto \max\{g(x), f(x)\}$ ist stetig,

(b) $x \mapsto \min\{g(x), f(x)\}$ ist stetig,

(c) $x \mapsto |f(x)|$ ist stetig.

(d) Es sei $|g(x)| \geq a > 0$. Zeigen Sie $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ ist stetig.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Bestimmen Sie für welche $b \in (0, \infty)$ das Cauchyprodukt von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^k}$ konvergiert. Geben Sie des weiteren eine Lösungsformel für an.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Es sein $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn f entweder strict monoton wachsend oder strict monoton fallend ist.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Sei $(x_k)_k$ monoton wachsend und $x_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_{k+1}}{x_k}\right)$$

konvergiert, genau dann, wenn $(x_k)_k$ beschränkt ist.

Abgabe bis Dienstag, den 26.11.2013 um 16:00 Uhr