Prof. Dr. Lars Diening
Dr. Sebastian Schwarzacher
Maximilian Wank 19.11.2013

Analysis einer Veränderlichen — Übungsblatt 5

Aufgabe 1: **(2+2+2) Punkte**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2k}{k}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{(k^2)}.$$

Lösung zu Aufgabe 1:

Für die erste Summe verwenden wir das Quotientenkriterium sei $a_k = \frac{1}{\binom{2k}{k}}$. Mit der Definition des Binomialkoefizienten folgt:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{(2k)!}{(k!)^2}}{\frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2}} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{1}{2}\frac{k+1}{2k+1} \leq \frac{1}{2}$$

Daraus folgt, dass die Reihe absolut konvergiert.

Für die zweite Summe verwenden wir nochmals das Quotientenkriterium sei $a_k = \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}$.

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{2^2 2^{2k}}{(2k+2)(2k+1)(2k)!}}{\frac{2^{2k}}{(2k)!}} = \frac{4}{(2k+2)(2k+1)} \xrightarrow{k} 0.$$

Daraus folgt, dass die Reihe absolut konvergiert.

Für die dritte Summe verwenden wir das Wurzelkriterium. Wir betrachten daher die Folge

$$\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{(k^2)}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k =: a_k.$$

Wir Zeigen nun, dass $\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \to \frac{1}{e} < 1$. Wir formen um:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k} = \left(\frac{k}{k-1}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \xrightarrow{k} e.$$

Hierbei haben wir verwendet, dass das Produkt von konvergenten Folgen konvergiert. Da die folge $\frac{1}{a_k} \to e$ folgt, dass $a_k \xrightarrow{k} \frac{1}{e}$. Daraus folgt, dass $|a_k| < 1 - \frac{e-1}{2e} < 1$ für fast alle k. Damit folgt nach dem Wurzelkriterium die absolute Konvergenz.

Aufgabe 2: **(2+2+1) Punkte**

Sei $\ell^1(\mathbb{R}) := \{x = (x_k)_k \text{ reelle Folge } : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}$.

(a) Zeigen Sie, $\ell^1(\mathbb{R})$ ist reeller Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(b) Wir definieren die 1-Norm $\|(x_k)_k\|_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \geq 0$. Zeigen Sie, dass

   (a) $\|x\|_1 = 0$ genau dann, wenn $x = (0)_k$.

(b) $\|\alpha x\|_1 = |\alpha| \, \|x\|_1$, für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in \ell^1(\mathbb{R})$.

(c) $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ für all $x, y \in \ell^1(\mathbb{R})$.

(c) Folgern Sie aus den obigen Eigenschafften, dass $d(x, y) := \|x - y\|_1$ eine Metrik auf $\ell^1(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 3: **(3+2) Punkte**

(a) Sei $x \in [0, 1)$. Zeigen Sie, dass dann eine Folge a_k, mit $a_k \in \{0, .., 9\}$ existiert, so dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} a_k = x.$$

(b) Folgern Sie, dass jede reelle Zahl als Dezimalzahl dargestellt werden kann.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Wir betrachten die Leibnizreihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Zeigen Sie, dass es für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Umordnung der Reihe gibt, die gegen c konvergiert.