Prof. Dr. Lars Diening
Sebastian Schwarzacher
Maximilian Wank 12.11.2013

Analysis einer Veränderlichen — Übungsblatt 4

Aufgabe 1: **(2+2) Punkte**

Wir definieren die Fakultät einer natürlichen Zahl als $n! := \prod_{k=1}^{n} k$ und $0! := 1$. Untersuchen Sie die Folgen $a_n := \frac{n!}{2^n}$ und $b_n := \frac{n!}{n^n}$ auf Konvergenz in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2: **(2+2) Punkte**

(a) Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine in $\mathbb{R}$ konvergente Reihe mit $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert.

(b) Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ Folgen mit $a_k \geq b_k \geq 0$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$. Beweisen Sie, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^2}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.
Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 2 ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Desweiteren existiere ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \geq N$. Zeigen Sie, dass aus $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ und $z_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ auch $y_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ folgt.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Aufgabe 6: **3 Punkte**

Es sei $s \in [0, \infty)$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ genau dann in $\mathbb{R}$ konvergiert, wenn $s > 1$ gilt.
Hinweis: Sie dürfen die Aufgaben 5 und 2 ohne Beweis verwenden.

Abgabe bis Dienstag, den 19.11.2013 um 16:00 Uhr