Prof. Dr. Lars Diening
Sebastian Schwarzacher
Maximilian Wank 29.10.2013

# Analysis einer Veränderlichen — Übungsblatt 2

**Aufgabe 1:** **(2+2) Punkte**

Bestimmen Sie die Suprema und Infima der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(a) $\{\frac{1}{x} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

(b) $\{\frac{1-x}{1+x} : x \in (0,\infty)\}$

**Aufgabe 2:** **(2+2) Punkte**

Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Wir definieren die Mengen $C := \{ca : a \in A\}$ sowie $A + B := \{a + b : a \in A \text{ und } b \in B\}$. Zeigen Sie

(a) Für $c \in [0,\infty)$ gilt $\sup(C) = c \sup(A)$ und desweiteren gilt für $c \in (-\infty, 0]$, dass $\inf(C) = c \sup(A)$.

(b) Zeigen Sie $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

**Aufgabe 3:** **4 Punkte**

Es sei $A \subset \mathbb{R}$ und $a = \sup A < \infty$. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ gibt, welche gegen $a$ konvergiert.

**Aufgabe 4:** **(2+2) Punkte**

Bestimmen Sie die Grenzwerte $(n \to \infty)$ der Folgen

(a) $\left(\frac{n^2}{n^2+n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und

(b) $\left(\min\{n, 1000\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Aufgabe 5:** **4 Punkte**

Es sei $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Weiterhin seien die Folgen $\left(a_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(a_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(a_{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Zeigen Sie, dass alle drei Grenzwerte gleich sind und folgern Sie, dass auch $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert konvergiert.

Abgabe bis Dienstag, den 5.11.2013 um 16:00 Uhr