Analysis einer Veränderlichen

Dozent: Prof. Dr. Lars Diening

WS 13/14

Version vom 11. Februar 2014 um 15:43 Uhr

Analysis einer Veränderlichen

Dozent: Prof. Dr. Lars Diening

Vorlesungsskript
am Mathematischen Institut
der Ludwig–Maximilians–Universität
München

geTEXt von
Thomas Eingartner

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundbegriffe

14.10.13

1.1 Mengen

Definition 1.1. Eine *Menge* ist eine Ansammlung von Objekten. Objekte der Menge heißen *Elemente*. Wir schreiben $x \in M$ falls x Element von M ist. Wir schreiben $x \notin M$ falls x nicht Element von M ist.

Beispiel 1.2.

$$\begin{aligned}
M &= \{a, b, c, d, e\} \\
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, 4, ...\} \text{ (natürliche Zahlen)} \\
\mathbb{N}_0 &= \{0, 1, 2, ...\} \\
\mathbb{Q} &= \left\{ \frac{p}{q} : \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\} \text{ (rationale Zahlen)} \\
\mathbb{R} &= \{\text{reelle Zahlen}\} \\
\mathbb{R}^+ &= \{x \in \mathbb{R} : \quad X > 0\} \\
\emptyset &= \{\ \} \text{ (leere Menge)}
\end{aligned}$$

Definition 1.3. Wir definieren die *Vereinigung* zweier Mengen A und B durch

$$A \cup B := \{x \ : \ x \in A \vee x \in B\}$$

und den *Schnitt* durch

$$A \cap B := \{x \ : \ x \in A \wedge x \in B\}.$$

Definition 1.4. A ist *Teilmenge* von B (in Symbolen: $A \subset B$) genau dann, wenn jedes Element von A auch in B ist.

Beispiel 1.5. (a) $\emptyset \subseteq M$
(b) $M \subset M$
(c) $\{2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$

Definition 1.6. Die *Differenz* zweier Mengen A und B ist definiert durch

$$A \backslash B := \{x \in A \ : \ x \notin B\}.$$

Ist die Obermenge Ω aus dem Zusammenhang klar, so ist $A^C := \Omega \backslash A$ das Komplement von A (bzgl. Ω).

Beispiel 1.7. (a) $M \backslash M = \emptyset$
(b) $M \backslash \emptyset = M$
(c) $\mathbb{N}_0 \backslash \{0\} = \mathbb{N}$

Definition 1.8. Bei endlichen Mengen sei $\#A$ die Anzahl der Elemente.

Beispiel 1.9. $\# \{1, 2, 3\} = 3$.

Definition 1.10. Sei A eine Indexmenge und M_α eine Menge, für $\alpha \in A$. Dann sei

$$\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha = \{ \ x \mid \text{es gibt ein } \alpha \text{ in } A, \text{ so dass } x \text{ in } M_\alpha \}$$

Beispiel 1.11. Sei $A := \{1, 2\}$, M_1 und M_2 Mengen. Dann ist

$$M_1 \cup M_2 = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha.$$

Definition 1.12. Für zwei Mengen A und B sei das *Produkt von Mengen* über

$$A \times B := \{(a, b) \ : \ a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

definiert.

Lemma 1.13. Es gelten die folgenden Rechenregeln:
(a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
(b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
(c) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
(d) De Morgan'schen Regeln:
- $(A \cap B)^C = (A^C) \cup (B^C)$
- $(A \cup B)^C = (A^C) \cap (B^C)$

Bemerkung 1.14. Es lassen sich sogar folgende Gleichheiten für beliebige (auch überabzählbare) Indexmengen zeigen:

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha \right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in B} C_\beta \right) = \bigcup_{(\alpha,\beta) \ \in \ A \times B} (M_\alpha \cap C_\beta)$$
$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha \right) \cup \left(\bigcap_{\beta \in B} G_\beta \right) = \bigcap_{(\alpha,\beta) \ \in \ A \times B} (M_\alpha \cup C_\beta)$$
$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha \right)^C = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha^C$$

Definition 1.15. Sei M eine Menge. Wir definieren die *Potenzmenge* als

$$\mathcal{P}(M) : = \{A \ : \ A \subset M\}$$

Bemerkung 1.16. Sei $M := \{1, 2\}$. Dann

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset \, , \{1\} \, , \{2\} \, , \{1, 2\}\} \, .$$

Es gilt immer $\#X < \#\mathcal{P}(X)$, wie wir auf den Übungsblättern sehen werden.

1.2 Logische Grundbegriffe

Eine *Aussage* ist stets wahr (w) oder falsch (f).

Beispiel 1.17. Aussagen:
i) Es regnet.
ii) Jeder Student trägt eine Brille.

Definition 1.18. Wir definieren die logischen Verknüpfungen *und* (in Zeichen: $\wedge$) und *oder* (in Zeichen: $\vee$) über die Wahrheitstabelle

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
f	f	f	f
f	w	f	w
w	f	f	w
w	w	w	w

Bemerkung 1.19. Es gelten

$$\begin{aligned} A &= \{x \ : \ x \in A\} \, , \\ A \cap B &= \{x \ : \ x \in A \ \wedge \ x \in B\} \text{ und} \\ A \cup B &= \{x \ : \ x \in A \ \vee \ x \in B\} \, . \end{aligned}$$

Definition 1.20. Wir definieren Implikationen von Aussagen A und B über

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow B && \text{(Aus A folgt B)} \\ A &\Leftrightarrow B && \text{(A ist äquivalent zu B)} \\ A &:\Leftrightarrow B && \text{(A ist definiert als B)} \end{aligned}$$

Bemerkung 1.21. Analog zu $\cap$ und $\cup$ gelten folgende Verknüpfungen mit $\wedge$ und $\vee$:

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \vee C &= (A \vee C) \wedge (B \vee C) \\ (A \vee B) \wedge C &= (A \wedge C) \vee (B \vee C). \end{aligned}$$

Definition 1.22. Wir definieren die *Negation* durch

$$\neg A \Leftrightarrow \text{nicht } A$$

Beispiel 1.23.

$$\neg\text{es regnet} \Leftrightarrow \text{es regnet nicht}$$

und

$$\begin{aligned}&\neg(\text{jeder Student trägt eine Brille})\\ &\quad\Leftrightarrow \text{Es gibt (mindestens) einen Studenten, der keine Brille trägt.}\end{aligned}$$

Definition 1.24. Wir definieren die *Quantoren* durch

$$\begin{aligned}\exists\ x &:\Leftrightarrow \text{Es gibt ein } x \text{ mit}\\ \forall\ x &:\Leftrightarrow \text{Für alle } x \text{ gilt}\end{aligned}$$

Bemerkung 1.25. Analog zu den De Morganschen Regeln gelten
a) $\neg(\exists \quad) = \forall\neg(\quad)$
b) $\neg(\forall \quad) = \exists\neg(\quad)$

Beispiel 1.26.

$$\begin{aligned}\neg(\forall\ x \in \{\text{Studenten}\} : x \text{ trägt Brille}) &\Leftrightarrow \exists\ x \in \{\text{Studenten}\} : \neg(\text{x trägt Brille})\\ &\Leftrightarrow \exists\ x \in \{\text{Studenten}\} : x \text{ trägt keine Brille}\end{aligned}$$

1.3 Abbildungen

Definition 1.27. Seien X, Y Mengen. Eine Abbildung f ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ ein $y \in Y$ zuordnet. Wir einigen uns auf folgende Notation:

$$\begin{aligned}f : X &\to Y\\ x &\mapsto f(x)\end{aligned}$$

X heißt *Definitionsbereich*, Y heißt *Werte-* oder *Zielbereich*.

Definition 1.28. Wir definieren das *Bild* von f durch

$$\text{im}(f) := \{f(x) \ : \ x \in X\}.$$

Bemerkung 1.29. Es gilt stets $\text{im}(f) \subseteq Y$.

Beispiel 1.30.

$$f:\ \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

Hier ist $X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $Y = \mathbb{R}$ und $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Definition 1.31. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X\, X :&\to X, \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

heißt *Identität* auf X.

Bemerkung 1.32. $\mathrm{im}\,\mathrm{id}_X = X$.

Definition 1.33. Eine gegebene Abbildung $f : X \to Y$ induziert

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(X) &\to \mathcal{P}(Y) \\ f(A) &\mapsto \{f(x)\ :\ x \in A\} \end{aligned}$$

Dies lässt die Schreibweise $\mathrm{im}(f) = f(X)$ zu. 17.10.13

Definition 1.34. Der Graph von $f : X \to Y$ ist definiert als

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

Beispiel 1.35. a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$

b) Sei $A \subset X$. Dann ist die charakteristische Funktion χ_A definiert durch

$$\chi_A := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Definition 1.36. Sei $A \in X$ und $f : X \to Y$. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} f|_A : A &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Restriktion von f auf A. ($f : X \to Y$ ist eine Erweiterung von $f|_A$ nach X.)

Definition 1.37. Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$. Dann heißt

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\to Z \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Komposition von f und g.

Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Definition 1.38. Sei $f : X \to Y$

a) Man nennt f *injektiv*, falls aus $x \neq y$ folgt $f(x) \neq f(y)$ für alle $x, y \in X$.
(alternativ: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$)

b) Man nennt f *surjektiv*, falls $f(X) = Y$ (alle Elemente in der Zielmenge werden getroffen.)
(alternativ: $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$)

c) f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel 1.39.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}\backslash\{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \frac{1}{x} \end{aligned}$$

f ist injektiv, aber nicht surjektiv, da $0 \notin \mathrm{im}(f)$. Allerdings gilt:

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}\backslash\{0\}) &= \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ \text{d.h: } f : \mathbb{R}\backslash\{0\} &\to \mathbb{R}\backslash\{0\} \end{aligned}$$

ist injektiv und surjektiv und damit bijektiv.

Beispiel 1.40.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n + 1 \end{aligned}$$

ist injektiv, aber weil $f(\mathbb{N}) = \{2, 3, ...\} \subsetneq \mathbb{N}$, ist f nicht surjektiv.

Beispiel 1.41.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to x^3 - x = x(x-1)(x+1) \\ 0 &= f(0) = f(1) = f(-1) \end{aligned}$$

f ist also nicht injektiv (aber surjektiv).

Bemerkung 1.42. Die Bijektivität einer Abbildung f impliziert zwischen X und Y eine $1 : 1$ Beziehung. Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so gibt es eine eindeutige Umkehrabibildung

$$f^{-1} : Y \to X, \text{mit } f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \text{ und } f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y .$$

Satz 1.43. Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ bijektiv, dann ist $g \circ f : X \to Z$ bijektiv und es gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Bemerkung 1.44. Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ surjektiv. Dann folgt

$$(g \circ f)(X) = g(\underbrace{f(X)}_{=Y}) = g(Y) \underbrace{=}_{g \text{ sur}} Z,$$

also ist $g \circ f$ surjektiv.

Bilder und Urbilder von Funktionen

Lemma 1.45. Sei $f : X \to Y, A, B, A_\alpha \subset X$, dann gilt:

a) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
c) $f(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$
d) $f(\bigcap_\alpha A_\alpha) \subset \bigcap_\alpha f(A_\alpha)$
e) $f(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$
f) $f^{-1}(\cap_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$
g) $f^{-1}(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$
h) $V \subset Y \to (f^{-1}(v))^C = f^{-1}(V^c)$

1.4 Mächtigkeit von Mengen

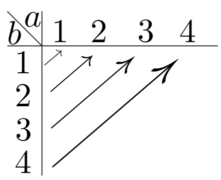
Die bis jetzt erlernten Techniken über den den Umgang mit Mengen und Abbildungen erlauben nun deren erste Anwendungen. Ein typisches Beispiel ist die Mächtigkeit von Mengen.

Definition 1.46. Zwei Mengen X und Y heißen *gleichmächtig*, falls es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt. Y ist gleichmächtig oder mächtiger, falls es eine Injektion $f : X \to Y$ gibt.

Beispiel 1.47. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind gleichmächtig, denn $(1, 2, 3, ...) \to (0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...)$ ist eine bijektive Abbildung.

Definition 1.48. X heißt *abzählbar*, falls X und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.
[Notation: $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$]

Beispiel 1.49. Wir zeigen: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig. Betrachte



Durchläuft man alle 2-Tupel $(a, b) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ wie in der Abbildung gezeigt, induziert dies eine bijektive Abbildung $i : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, also gilt:

$$\# \underbrace{(\mathbb{N}^n)}_{\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}} = \#\mathbb{N} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

Bemerkung 1.50. Allgemein gilt

$$\#A < \infty \Rightarrow \#(A^n) = (\#A)^n.$$

Definition 1.51. Eine Menge A heißt *überabzählbar* genau dann, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.

Satz 1.52. Sei X eine beliebige Menge. Dann gibt es keine Surjektion von X nach $\mathcal{P}(X)$ (d.h. $\mathcal{P}(X)$ ist mächtiger als X).

Beweis durch Widerspruch. Angenommen es gibt eine Surjektion $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Sei nun $A := \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Da f surjektiv ist, existiert ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = A$
Fall 1: $x_0 \in A$. Nach Definition von A folgt $x_0 \notin f(x_0) = A \Rightarrow x_0 \notin A$ ↯
Fall 2: $x_0 \notin A$. Nach Definition von A folgt $x_0 \in f(x_0) = A \Rightarrow x_0 \in A$ ↯
Aus dem Widerspruch folgt die Behauptung. □

Korollar 1.53. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

Bemerkung 1.54. i) $\mathbb{R}$ ist auch überabzählbar.
ii) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, da $\#\mathbb{Q} = \#(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) = \#(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \#\mathbb{N}$.

1.5 Vollständige Induktion

Wir wollen zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt ($n \in \mathbb{N}_0$). Dafür reicht es zu zeigen, dass
a) $A(n_0)$ gilt (Induktionsanfang) und
b) aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$ (Induktionsschritt).

Beispiel 1.55.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 = 2^2 \\ 1+3+5 &= 9 = 3^2 \end{aligned}$$

Nun lässt sich vermuten, dass

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$$

und wir formulieren

Satz 1.56. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2.$$

Beweis. Induktionsanfang ($n = 1$):

$$\sum_{j=1}^{1}(2j-1) = 1 = 1^2$$

Induktionsschritt ($n \mapsto n+1$):

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1}(2j-1) &= \sum_{j=1}^{n}(2j-1) + (2(n+1)-1)\\ &\overset{\text{IV}}{=} n^2 + 2n + 1\\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

□

2 Reelle Zahlen

21.10.13

Aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (oder $\mathbb{N}_0$) ergeben sich durch Subtraktion die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Durch Divison erhält man $\mathbb{Q}$, die rationalen Zahlen (Brüche). Weitere Operationen (Wurzeln, Grenzwerte) führen zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

2.1 Eigenschaften

$\mathbb{R}$ ist ein *Körper*. Dieser wird im Folgenden definiert.

Definition 2.1. Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelte:

a) Addition:
   a) Assoziativgesetz $(x + y) + z = x + (y + z)$
   b) Kommutativgesetz $x + y = y + x$
   c) Existenz des additiv Inversen, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ exisitert $(-x) \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$
   d) Existenz der Null $x + 0 = x$

b) Multiplikation
   a) Assoziativgesetz: $(xy)z = x(yz)$
   b) Kommutativgesetz $xy = yx$
   c) Existenz des multiplikativ Inversen: Zu $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ existiert ein $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ mit $x(x^{-1}) = 1$
   d) Existenz der Eins $x \cdot 1 = x$

c) Distributivgesetz: $x(y + z) = (xy) + (xz) = xy + xz$

d) $\mathbb{R}$ ist ein *geordneter Körper*. D.h.
   a) Aus $x \leq y$ und $y \leq z$, so folgt $x \leq z$
   b) $(x \leq y$ und $y \geq x)$ ist äquivalent zu $x = y$
   c) Es gilt immer $x \leq y$ oder $y \leq x$
   d) Aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$
   e) Aus $x \geq y$ folgt $x + z \geq y + z$
   f) Aus $x \geq 0$ und $y \geq 0$ folgt $xy \geq 0$

e) $\mathbb{R}$ ist ein *archimedisch geordneter Körper:*
   D.h. für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$

f) Es gilt das *Intervallschachtlungsprinzip:*
   Sei $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ...$, so ist $\bigcap_{n\geq 1}[a_n, b_n] \neq \emptyset$.
   D.h. es existiert $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$.

Notation:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &:= \underbrace{\{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x \leq b\}}_{\text{für } a \leq b \text{ abgeschlossen}} \\
(a,b) &:= \underbrace{\{x \in \mathbb{R} : \; a < x < b\}}_{\text{offen}} \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x < b\} \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : \; a < x \leq b\}
\end{aligned}
$$

Bemerkung 2.2.

a) $x < y :\Leftrightarrow (x \leq y \text{ und } x \neq y)$

b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Eigenschaften:

  a) $x = y$

  b) $x < y$

  c) $x > y$

Bemerkung 2.3.

a) Aus $x < y$ und $y \leq z$ folgt $x < z$

b) $x + z \leq y + z \Leftrightarrow x \leq y$ (addiere (-z))

2.2 Betrag und Beschränkte Mengen

Definition 2.4. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $|x|$ als:

$$
|x| := \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}
$$

Bemerkung 2.5.

a) $-|x| \leq x \leq |x|$

b) $|x| = \sqrt{x^2}$

Lemma 2.6. Der Betrag in $\mathbb{R}$ hat die folgende Eigenschaften:

a) $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
und es gilt:
$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) Multiplikativität:
$|xy| = |x||y| \quad$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

c) Dreiecksungleichung:
$|x + y| \leq |x| + |y| \quad$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

Beweis.

a) ✓

b) Wir finden $_0, y_0 \in [0, \infty)$, so dass $|x| = x_0, |y| = y_0$. Nun gilt $xy = \underbrace{x_0 y_0}_{\geq 0}$ oder $xy = -\underbrace{x_0 y_0}_{\geq 0} \Rightarrow |xy| = x_0 y_0 = |x||y|$.

c) Es gilt $x \leq |x|, y \leq |y| \Rightarrow x + y \leq |x| + |y|$
Ebenso $-|x| \leq x, -|y| \leq y \Rightarrow -(|x| + |y|) \leq x + y$
$\Rightarrow -(x + y) \leq |x| + |y| \Rightarrow (x + y) \leq |x| + |y|$

□

Folgerung 2.3
Seien $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{(Subadditivität)}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} n &= 1: \text{ klar!} \\ n &= 2: \text{ Folgt aus } |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \end{aligned}$$

Induktionsschritt $(n \mapsto n + 1)$:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right| &= \left| \left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + x_{n+1}\right| \\ &\overset{n=2}{\leq} \left| \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right| + |x_{n+1}| \\ &\overset{I.V.}{\leq} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right) + |x_{n+1}| \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} |x_i|. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.7. Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$

a) Aus $z \geq 0$ und $x \leq y$ folgt $xz \leq yz$.

b) Aus $z \leq 0$ und $x \leq y$ folgt $xz \geq yz$ (bzw. $yz \leq xz$)

c) $x^2 \geq 0$

d) $\underbrace{x^2}_{=|x|^2} > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Beweis. Ohne Beweis. □

Bemerkung 2.8.

a) Aus $z > 0$ und $x < y \Rightarrow xz < yz$

b) Aus $x > 0$ folgt $\frac{1}{x} > 0$, da $\frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 > 0 \xRightarrow{\cdot x > 0} \frac{1}{x} > 0$.

c) $0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

Definition 2.9. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt A nach oben (unten) *beschränkt*, falls es ein $b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b \, (b \leq a)$ für alle $a \in A$ gibt. b heißt *obere (untere) Schranke* von A.

Beispiel 2.10.

a) $\{1, 3, \pi\}$ hat untere Schranke 0 und obere Schranke 4.

b) $(-\infty, 2) \cup (3, 4]$ hat obere Schranken $5, 4, 7$ aber keine untere Schranke.

Satz 2.11. Jede nach oben beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$ besitzt genau eine kleinste obere Schranke. Diese heißt *Supremum* von A. (In Symbolen: $\sup(A)$)

Beweis. Sei A nach oben beschränkt, $A \neq \emptyset$. Sei b_0 obere Schranke von A und sei $a_0 \in A \Rightarrow a_0 \leq b_0$ Sei $I_0 = [a_0, b_0]$.
Konstruiere Intervallschachtelung mit

a) b_n ist obere Schranke von A

b) $a_n \in A$ ($\Rightarrow a_n \leq b_n$)

c) $b_n - a_n \leq 2^{-n}|b_0 - a_0|$

d) $I_n \subset I_{n-1}$ mit $I_n := [a_n, b_n]$

Fall $n = 0$: ✓

Schritt $n \mapsto n + 1$. Fall: $\frac{a_n+b_n}{2}$ ist obere Schranke von A:
Dann setzen wir $a_{n+1} := a_n \in A$ und $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$. Es folgt $[a_{n+1}, b_{n+1}] = \left[a_{n+1}, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \subset [a_n, b_n]$. Und $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}|b_n - a_n| \overset{IV}{\leq} \frac{1}{2}2^{-n}|b_0 - a_0| = 2^{-n-1}|b_0 - a_0|$.
Fall $\frac{a_n+b_n}{2}$ ist nicht obere Schranke von A. Dann existiert $a_{n+1} \in \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] \cap A$. Sei $b_{n+1} := b_n$.
$\Rightarrow b_{n+1} - a_{n+1} \leq b_n - \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{b_n-a_n}{2} \overset{IV}{\leq} \frac{1}{2}2^{-n}|b_0 - a_0|$.
Ausserdem ist $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] \subset [a_n, b_n]$. Nun folgt, dass $I_0 \supset I_1 \supset \ldots$
24.10.2013 Nach dem Intervallschachtelungsprinziep gilt $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \neq \emptyset \Rightarrow \exists d \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$.
Behauptung: d ist obere Schranke von A.
Beweis durch Widerspruch: Angenommen d ist nicht obere Schranke.

$$\Rightarrow \exists \tilde{a} \in A \text{ mit } \tilde{a} > d \tag{2.1}$$

Nach dem Archimedischen Prinzip existiert ein n so, dass

$$|\tilde{a} - d| \cdot 2^n > |b_0 - a_0|$$
$$\Rightarrow \underbrace{|\tilde{a} - d|}_{>0} > 2^{-n}|b_0 - a_0|$$

$$
\begin{aligned}
&\text{da } d \in [a_n, b_n], d.h.\ a_n \leq d \\
&\Rightarrow b_n - d \leq b_n - a_n \leq 2^{-n}|b_0 - a_0| < |\tilde{a} - d| = \tilde{a} - d \\
&\Rightarrow b_n < \tilde{a} \quad (\lightning \text{ zu } b_n \text{ ist obere Schranke von A})
\end{aligned}
$$

Wir zeigen weiter: d aus Satz 2.6 ist kleinste obere Schranke.
Angenommen, es gäbe eine obere Schranke $\tilde{d}$ von A mit $\tilde{d} < d$
Wähle n so, dass

$$
\begin{aligned}
&|d - \tilde{d}| \cdot 2^n > |b_0 - a_0| \Rightarrow |d - \tilde{d}| > 2^{-n}|b_0 - a_0| \\
\Rightarrow\ &\tilde{d} - a_n \underbrace{\leq} d \leq b_n b_n - a_n \leq 2^{-n}|b_0 - a_0| < d - \tilde{d} \Rightarrow -a_n \leq -\tilde{d} \Rightarrow \tilde{d} < a_n
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \lightning$ zu $\tilde{d}$ ist $\underbrace{\text{obere Schranke}} \Rightarrow a_n \leq \tilde{d}$ von A. □

Bemerkung 2.12.
- $\sup(0, \pi) = \pi \in \mathbb{R}$.
- Das Supremum einer beschränkten Menge $A \subsetneq \mathbb{Q}$ muss nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.

24.10.13

Definition 2.13. Ist A nach unten beschränkt, so heißt die größte untere Schranke *Infimum von* A (in Zeichen $\inf A$).

Bemerkung 2.14. Es gilt $a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$ Damit lässt sich $\inf A = -\sup(-A)$ zeigen (Übung!).

Definition 2.15. Ist A nach oben unbeschränkt, so setze $\sup A := \infty$. Ist A nach unten unbeschränkt, so setze $\inf A := -\infty$.

Definition 2.16. Man nennt $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ erweiterte reelle Zahlen.

Wir setzen:

$$
\begin{aligned}
\sup\ \emptyset &:= -\infty \\
\inf\ \emptyset &:= +\infty
\end{aligned}
$$

Bemerkung 2.17.

$$
\begin{aligned}
\sup : \mathcal{P}(\mathbb{R}) &\to \overline{\mathbb{R}} \\
\inf : \mathcal{P}(\mathbb{R}) &\to \overline{\mathbb{R}} \\
\sup(A \cup B) &= \max\{\sup A, \sup B\}
\end{aligned}
$$

Für eine Indexmenge I sei

$$\sup_{\alpha \in I} a_\alpha := \sup\{a_\alpha : \alpha \in I\}$$

Definition 2.18. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Ist $\sup A \in A$, so nennt man $\sup A$ auch *Maximum* von A.

Beispiel 2.19. Zwar gilt

$$\sup(0,1) = 1 = \sup(0,1],$$

aber 1 ist nur ein Maximum von $(0,1]$, nicht aber von $(0,1)$.

Konvention:

$$-\infty \leq a \leq \infty \text{ für jedes } a \in \mathbb{R}.$$

3 Folgen und Reihen

Ein wesentlicher Begriff der Analysis ist die *Konvergenz.* Diesen führen wir in diesem Kapitel ein.

3.1 Folgen

Definition 3.1. Sei M eine Menge. Eine *Folge* ist eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M$. Wir nennen $\varphi(n)$ das n-te Folgenglied.
Schreibweise:

$$(a_1, a_2, ...) \text{ oder } (a_n)_n \text{ oder } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ wobei } a_n := \varphi(n).$$

Bemerkung 3.2. Folgen können auch bei $n_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen, z.B. $(a_{-1}, a_0, a_1, ...)$ (Indexverschiebung).

Beispiel 3.3.

a) $(1, 2, 3, ...) = (n)_n$
b) $(4, 4, 4, ...)$ konstante Folge
c) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right) = \left(\frac{1}{n}\right)_n$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{R}$)
d) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_n = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, ...\right)$

Bemerkung 3.4. Mann muss zwischen der Folge $(x_n)_n$ und ihrem Bild $\underbrace{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ (Menge!) unterscheiden.

Bemerkung 3.5.

a) Man kann Folgen in $\mathbb{R}^n$ wählen. ($\mathbb{R}^2$ = Ebene)
b) Folge von Intervallen $\left(\left[-1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right]\right)_n$

3.2 Metrische Räume, Abstand

Wichtig für Folgen und Konvergenz ist der Abstand (Metrik).

Definition 3.6. Sei M eine Menge und $d : \ M \times M \mapsto [0, \infty)$, $(a, b) \mapsto d(a, b)$, mit den drei Eigenschaften:

$$M_1) \quad (d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y) \text{ für alle } x, y, \in M$$

M_2) $d(x,y) = d(y,x)$

M_3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung)

Dann heißt d *Metrik* (auf M) und (M, d) heißt *metrischer Raum.*

Beispiel 3.7.

a) Sei $M := \mathbb{R}$, $d(x,y) := |x-y|$. Dann ist d Metrik, denn:

   i) $d(x,y) = |x-y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

   ii) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

   iii) $d(x,y) = |x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(y,z)$

b) $\mathbb{R}^n, x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$
   Dann ist $d(x,y) := \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$
   Notation: $||x||_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ (Maximumsnorm)

c) $\mathbb{R}^n$
   Dann ist $d(x,y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = ||x-y||_1$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$.
   Notation: $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ (1-Norm)

d) Euklidischer Abstand:
   $d(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$ ist Metrik auf $\mathbb{R}^n$.
   Wir definieren $||x||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ für $x \in \mathbb{R}^n$ als die *euklidische Norm* von x.
   Wir zeigen später, dass $d(x,y) = ||x-y||_2$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist.

3.3 Skalarprodukt

28.10.13

Definition 3.8. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei $x \cdot y := \sum_{i=1}^n (x_i y_i)$ und $||x||_2 = \sqrt{x \cdot x}$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}$.

Lemma 3.9. Für $x, y, \in \mathbb{R}^n$ gilt die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:*

$$|x \cdot y| = \Big|\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big| \leq ||x||_2 ||y||_2$$

Beweis. Fall $x = 0$: z.Z. (zu Zeigen): $0 \leq 0$ ✓
Fall $y = 0$: ✓
Fall $x, y, \neq 0$: Wir definieren

$$a := \frac{1}{||x||_2} x \text{ und } b := \frac{1}{||y||_2} y, \text{ d.h. } a_i := \frac{1}{||x||_2} x_i \text{ und } b_i := \frac{1}{||y||_2} y_i, \text{ für } i = 1, ..., n.$$

Damit gilt

$$||a||_2 = ||b||_2 = 1,$$

denn

$$||a||_2^2 \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{||x||_2^2}|x_i|^2 = \frac{1}{||x||_2^2}\, \underbrace{|\sum_{i=1}^n x_i^2|}_{=||x||_2^2} = 1.$$

Wir verwenden, dass für alle $s, t \in [0, \infty)$

$$s \cdot t \leq \frac{s^2}{2} + \frac{t^2}{2}$$

gilt (letztere Aussage ist äquivalent zu $0 \leq \frac{1}{2}(s-t)^2$ und damit wahr). Nun berechnen wir direkt

$$|a \cdot b| = \left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{|a_i|^2}{2} + \frac{|b_i|^2}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \tag{3.1}$$

wobei wir

$$\sum_{i=1}^n |b_i|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = 1$$

verwendet haben. Mit der Definition von a und b folgt nun direkt

$$\frac{|x \cdot y|}{||x||_2 ||y||_2} = |\sum_{i=1}^n \frac{1}{||x||_2} x_i \frac{1}{||y||_2} y_i| = |a \cdot b| \overset{(3.1)}{\leq} 1$$

Multiplikation der letzten Gleichung mit $||x||_2 ||y||_2$ beweist die Aussage. □

Lemma 3.10. Für $x, y, \in \mathbb{R}^n$ gilt $||x + y||_2 \leq ||x||_2 + ||y||_2$

Beweis. Wir zeigen $||x + y||^2 \leq (||x||_2 + ||y||_2)^2$, woraus die Aussage direkt folgt. Dafür berechnen wir direkt

$$\begin{aligned}
||x + y||_2^2 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right) + 2\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right) \\
&\overset{(*)}{\leq} ||x||_2^2 + 2|x \cdot y| + ||y||_2^2 \\
&\leq ||x||_2^2 + 2||x||_2 \cdot ||y||_2 + ||y||_2^2 \\
&= (||x||_2 + ||y||_2)^2,
\end{aligned}$$

wobei wir bei $(*)$ die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwendet haben. □

Lemma 3.11. Für $d(x,y) := ||x-y||_2$ ist eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Wir müssen die Definition einer Metrik überprüfen.

M1) Es gilt

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\iff ||x-y||_2^2 = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 = 0 \\ &\iff |x_i - y_i| = 0 \text{ für } i = 1, ...n \\ &\iff x_i = y_i, \text{ für } i = 1, ..., n \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

M2) $d(x,y) = ||x-y||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i - x_i|} = ||y-x||_2 = d(y,x)$.

M3) $\|x-y\|_2 \leq ||x-z||_2 + ||z+y||_2$ da $x-y = (x-z)+(z-y)$ und der eindimensionalen Dreiecksungleichung.

□

3.4 Kugeln, Bälle

Definition 3.12. Sei (X,d) metrischer Raum. Für $x \in X$ und $r > 0$ (d.h. $r \in (0,\infty)$) definieren wir

$$\begin{aligned} B_r(x) = B(x,r) &:= \{y \in X : d(x,y) < r\} \text{ (offener Ball) und} \\ \overline{B}_r(x) = \overline{B}(x,r) &:= \{y \in X : d(x,y) \leq r\} \text{ (abgeschlossener Ball)} \end{aligned}$$

Des Weiteren sei

$$S_r(x) := S(x,r) := \{y \in X : d(x,y) = r\} \text{ (Sphäre).}$$

Damit ist

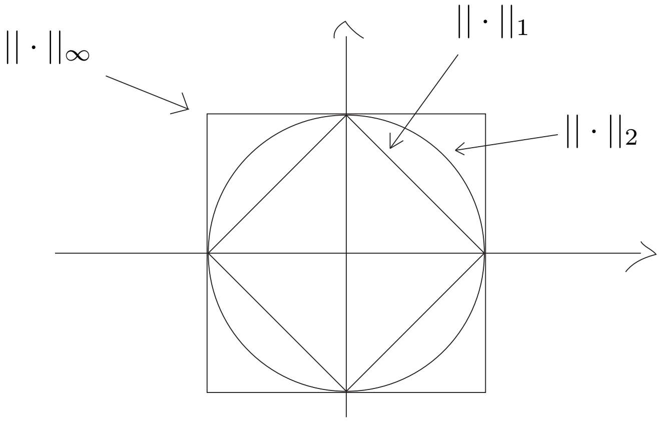
$$\overline{B}_r(x) = B_r(x) \cup S(x)$$

In allen Fällen heißt r der Radius.

Beispiel 3.13.

a) Fall: $d(x,y) = ||x-y||_2$. In diesem Fall ist die Kugel glatt, d.h. sie hat keine Ecken.
b) Fall: $d(x,y) = \max_{i=1,...,n} |x_i - y_i| = ||x-y||_\infty$
c) Fall: $(x,y) = ||x-y||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

Einheitsball im $\mathbb{R}^2$ mit verschiedenen Metriken:



Bemerkung 3.14. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1.$$

Für $n = 2$ heißt das

$$\max\{|a|, |b|\} \leq \sqrt{|a|^2 + |b|^2} \leq |a| + |b|.$$

für $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Weiterhin gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = n||x||_\infty.$$

Für $x = (1, ..., 1)$ gilt offenbar $n||x||_\infty = n = ||x||_1$, vorige Ungleichung ist also scharf.

Definition 3.15. Sei $A \subset X$ und $A \neq \emptyset$ und (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt A beschränkt, falls der *Diameter, bzw. Durchmesser* von A definiert als

$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} d(x, y) < \infty.$$

Definition 3.16. Eine Abbildung $f : Z \mapsto (X, d)$ mit (X, d) metrischer Raum heißt *beschränkt*, falls $\operatorname{im}(f)$ beschränkt ist.

Beispiel 3.17.

a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $\operatorname{im}(f) = [-1, 1]$
$\Longrightarrow f$ ist beschränkt

b) $\frac{1}{x} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$ ist unbeschränkt.

Definition 3.18. Für $A, B \subset X$ mit (X, d) metr. Raum ist der Abstand zwischen den Mengen A und B definiert als

$$d(A, B) := \inf \{d(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

3.5 Konvergenz

Für reelle Folgen:

Definition 3.19. Sei $(x_n)_n$ reelle Folge und $x \in \mathbb{R}$. Wir sagen $(x_n)_n$ *konvergiert* gegen x, falls für alle $\varepsilon > 0$ es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so, dass $|x_n - x| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

In Zeichen:
i) $x_n \to x$ für $n \mapsto \infty$
ii) $x_n \xrightarrow{n} x$
iii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

Bemerke: Für fast alle n (alle bis auf endlich viele) gilt: $|x_n - x| \leq \varepsilon$.

Für metrischen Raum:

Definition 3.20. Sei $(x_n)_n$ Folge im metrischen Raum (X, d) und $x \in X$. Wir sagen $(x_n)_n$ *konvergiert* gegen x, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so, dass $d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Dann heißt x *Grenzwert* von $(x_n)_n$.
In Zeichen:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ in } (X, d),\ x_n \xrightarrow{n} x \text{ in } (X, d)$$

Bemerkung 3.21.
a) Konvergenz heißt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle x_n in $B_\varepsilon(x)$ sind.
b) $x_n \to x$ in (X, d) genau dann, wenn $d(x_n, x) \xrightarrow{n} 0$ in $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.22.
a) Sei $x_n := \frac{1}{n}$. Wir zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$, dann existiert nach dem archimedischem Axiom ein $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ und $(0 \leq)\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon}$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Daraus folgt $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$.
b) Sei $x_n := 4$ (konstante Folge). Offenbar gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$.
c) Ein Beispiel in $\mathbb{R}^2$:

$$\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}, \underbrace{\frac{3n+1}{5n+1}}_{=\frac{3+\frac{7}{n}}{5+\frac{1}{n}}}\Big) \xrightarrow{n} \Big(1, \frac{3}{5}\Big)$$

Definition 3.23. $(x_n)_n$ heißt divergent, falls x_n nicht konvergiert.

Beispiel 3.24. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent (siehe Präsenzaufgaben).

31.10.2013

Bemerkung. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in (X, d).
Dann heißt $(x_n)_n$ beschränkt, falls das Bild $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Lemma 3.25. Sei (x_n) konvergente Folge in (X, d). Dann ist der Grenzwert eindeutig.

Beweis. Sei $x, y \in X$ mit $x_n \overset{n}{\to} x$ und $x_n \overset{n}{\to} y$.
Behauptung: $x = y$
$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y)$
Da $x_n \to x$ und $x_n \to y$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n,x) < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$ und $d(x_n,y) < \varepsilon$ für $n \geq m_\varepsilon \Rightarrow d(x,y) \leq 2\varepsilon$ für $n \geq max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig folgt $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. □

Lemma 3.26. Sei $(x_n)_n$ konvergente Folge in (X,d). Dann ist $(x_n)_n$ beschränkt.

Beweis. Sei $x \in X$ der Grenzwert, d.h. $x_n \overset{n}{\to} x$.
$\Rightarrow$ Es existiert ein n_0 mit $d(x_n,x) < 1$ für $n \geq n_0$.
$\Rightarrow d(x_n,x) \leq max\{1, d(x_1,x), ..., d(x_{n_0},x)\} =: R < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow d(x_n,x_k) \leq d(x_n,x) + d(x_k,x) \leq 2R$ für alle $k,n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt. □

3.5.1 Rechenregeln für Folgen in $\mathbb{R}$

a) $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow x_n + y_n \to x + y$
b) $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow x_n \cdot y_n \to x \cdot y$
c) $x_n \to x, y_n \to y$ und $y, y_n \neq 0$ für fast alle $n \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$

Beweis von 1). Wir zeigen: $|(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ (da $x_n \to x$ und $y_n \to y$). Daraus folgt: $|(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon$. Daraus folgt die Behauptung. □

Beweis von 2).

$$|x_n y_n - xy| = |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \leq |x_n - x||y_n| + |x||y_n - y|$$

Da $y_n \to y$ existiert ein $R > 0$ mit $|y_n| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow |x_n y_n - xy| \leq |x_n - x|R + |x||y_n - y|$
Wähle $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x| < \frac{1}{2}\varepsilon\frac{1}{R}$ und $|y_n| < \frac{1}{|x|+1}\frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.
Daraus folgt: $|x_n y_n - xy| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{|x|}{1+|x|}\frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. □

Beweis von 3). Wir zeigen zuerst $y_n \to y, y \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y}$. Zunächst wähle n_0 so, dass $|y_n - y| < \frac{|y|}{2} \neq 0$ für $n \geq n_0$
$\Rightarrow |y_n| \geq |y| - |y - y_n| > \frac{|y|}{2} > 0$ für $n \geq n_0$.
$\Rightarrow$ Die Folge $\frac{1}{y_n}$ ist ab n_0 wohldefiniert!
Nun gilt für $n \geq n_0$

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - y_n}{y_n y}\right| = \frac{|y - y_n|}{|y_n||y|}$$

$$\begin{aligned} &= |y-y_n|\frac{1}{|y_n|}\frac{1}{|y|} \text{ für } n \geq n_0 \\ &\leq |y-y_n|\frac{2}{|y|}\frac{1}{|y|} \text{ da } \underbrace{|y_n| > \frac{1}{2}|y|}_{\Rightarrow \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|y|}}. \end{aligned}$$

Wir wählen nun n_ε so groß, dass

$$\begin{aligned} |y-y_n| &< \varepsilon\frac{|y|^2}{2} \text{ für } n \geq n_\varepsilon \\ \Rightarrow \left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_n}\right| &< \varepsilon\frac{|y|^2}{2}\frac{2}{|y|^2} = \varepsilon \text{ für } n \geq max\{n_0, n_\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y}$.

□

Zurück zu 3): Da $x_n \xrightarrow{n} x$ und $\frac{1}{y_n} \xrightarrow{n} \frac{1}{y} \overset{\text{nach 2)}}{\Longrightarrow} x\frac{1}{y} \xrightarrow{n} \frac{x}{y}$.

Beispiel 3.27.

$$\frac{2n+1}{n+7} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{7}{n}} \to \frac{2}{1} = 2.$$

Da aus $\frac{1}{n} \to 0$ folgt, dass $2+\frac{1}{n} \to 2$ und $\frac{7}{n} \to 0$ damit konvergiert auch $1+\frac{7}{n} \to 1$.

Definition 3.28. Sei $(x_n)_n$ eine Folge. Dann heißt $(y_k)_k$ *Teilfolge*, falls $y_n = x_{n_k k}$ wobei $n_k \in \mathbb{N}$ und $k \mapsto n_k$ strikt wachsend ist. (Man lässt also Folgenglieder weg.)
Schreibweise: $(x_{n_k})_k$

Beispiel 3.29.

$$\begin{aligned} x_n &:= (-1)^n \\ \Rightarrow (x_1, x_3, x_5, x_7 ...) &= (x_{2n-1})_n \qquad = (-1, -1, ...) \text{ ist Teilfolge.} \\ (x_{2n})_n &= (+1)_n \text{ ist Teilfolge} \end{aligned}$$

Lemma 3.30. Sei $x_n \xrightarrow{n} x \in (X, d)$
Dann konvergiert jede Teilfolge ebenfalls gegen x.

Beweis. Sei $(x_{n_k})_k$ eine Teilfolge $\Rightarrow n_k \geq k$
Sei: $\varepsilon > 0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$
$\Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ für $k \geq n_\varepsilon$ da $n_k \geq k \geq n_\varepsilon$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war folgt $x_{n_k} \xrightarrow{k} x$. □

Ziel: Charakterisierung von Konvergenz bei Vermeidung des Grenzwerts. Wir rechnen

$$x_n \to x \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_\varepsilon$$
$$\Rightarrow |x_n - x_k| \leq |x_n - x| + |x_k - x| < 2\varepsilon \text{ für} k, n > n_\varepsilon.$$

Das heißt folgenglieder liegen sehr nah beieeinander.

Definition 3.31. Sei $(x_n)_n$ Folge in (X, d). Dann heißt $(x_n)_n$ *Cauchy-Folge*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(x_n, x_k) < \varepsilon$ für alle $n, k \geq n_\varepsilon$.

Lemma 3.32. Sei $x_n \xrightarrow{n} x$ in (X, d). Dann ist $(x_n|n)$ eine Cauchyfolge.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon : d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_\varepsilon$.
$\Rightarrow d(x_n, x_k) \leq d(x_n, x) + d(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für alle $k, n \geq n_\varepsilon$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch, gilt jedoch für spezielle (X, d).

Definition 3.33. Ein metr. Raum (X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchyfolge konvergiert.

Beispiel 3.34. Berechnung von $\sqrt{2}$
$f(x) := x^2 - 2 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 0$
$a_1 := 2 \quad a_2 := a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$.
Das Newton Verfahren ist defiert über die Rekursion

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - \frac{a_n^2 - 2}{2a_n}.$$

Diese rekursiv definierte Folge besteht aus rationalen Zahlen. Das heißt $(a_n)_n$ ist Folge in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Ohne Beweis: $a_n \to \sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$
$\Rightarrow (a_n)_n$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$. Da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a_n$ konvergiert diese Folge nicht in $\mathbb{Q}$.
$\Rightarrow \mathbb{Q}$ ist nicht vollständig (mit $d(x, y) = (x - y)$).

Lemma 3.35. Jede Cauchyfolge ist beschränkt

Beweis. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $d(x_k, x_m) < 1$ für $k, m \geq n_0$
$\Rightarrow d(x_k, x_{n_0}) < 1$ für alle $k \geq n_0$
$\Rightarrow d(x_m, x_{n_0}) \leq max\{1, d(x_1, x_{n0}), ..., d(x_{n_0}, x_{n_0})\} =: R < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow d(x_k, x_n) < 2R$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$. $\square$

04.11.2013

Lemma 3.36. Sei $(x_n)_n$ Cauchyfolge in (X, d). Besitzt $(x_n)_n$ eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \xrightarrow{k} x$. Dann gilt $x_n \xrightarrow{n} x$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_\varepsilon$.
Außerdem ex. k_ε mit $d(x_{n_k}, x) \leq \varepsilon$ für $k \geq k_\varepsilon \Rightarrow$ Für $m \geq max\{k_\varepsilon, n_\varepsilon\}$ gilt

$$d(x_m, x) \leq \underbrace{d(x_m, x_{n_{k_\varepsilon}})}_{<\varepsilon} + d(\underbrace{x_{n_{k_\varepsilon}}}_{n_{k_\varepsilon} \geq k_\varepsilon \geq n_\varepsilon}, x)$$

Ohne Einschränkung sei $k_\varepsilon \geq n_\varepsilon$.
$\Rightarrow d(x_m, x) < 2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig folgt $x_m \xrightarrow{m} x$. □

Satz 3.37. $\mathbb{R}$ ist vollständig bezüglich $d(x, y) = |x - y|$.

Beweis. Sei (x_n) eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$.
Zu $k \in \mathbb{N}$ ex. n_k so, dass $|x_n - x_m| < 2^{-k}$ für $m, n \geq n_k$.
Betrachte Teilfolge $(x_{n_k})_k \Rightarrow |x_{n_k} - x_{n_j}| \leq 2^{-k}$ für $j \geq k$. Wir definieren
$I_k := \left[x_{n_k} - 2^{-k+1}, x_{nk} + 2^{-k+1}\right]$.
Zwischenbehauptung: $I_k \supset I_{k+1}$ für $k \in \mathbb{N}$
Sei $y \in I_{k+1}$.
$\Rightarrow |x_{n_{k+1}} - y| \leq 2^{-(k+1)+1} = 2^{-k}$
$\Rightarrow |x_{nk} - y| \leq \underbrace{|x_{n_{k+1}}}_{\leq 2^{-k}} - y| + \underbrace{|x_{n_{k+1}} - x_{nk}|}_{\leq 2^{-k}} \leq 2^{-k+1}$
$\Rightarrow y \in \left[x_{n_k} - 2^{-k+1}, x_{n_k} + 2^{-k+1}\right] = I_k$. Dies beweist die Zwischenbehauptung. Nun folgt nach dem intervallischen Axiom:

$$\exists z \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset.$$

Bleibt zu zeigen, das $x_{n_k} \xrightarrow{k} z$. Nun gilt für alle $k \in \{1, .., \infty\}$ gilt $z \in I_k$.
$\Rightarrow |x_{n_k} - z| \leq 2^{-k+1} \xrightarrow{k} 0$.
$\Rightarrow |x_{n_k} - z| \xrightarrow{k} 0$.
$\Rightarrow x_{n_k} \xrightarrow{k} z$. Mit dem letzten Lemma folgt $x_n \xrightarrow{z} z$ da $(x_n)_n$ Cauchyfolge ist. □

Bemerkung 3.38. Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ Folgen mit $0 \leq |a_n| \leq |b_n|$ und $b_n \to 0$
$\Rightarrow a_n \to 0$.

Bemerkung 3.39. Sei $q \in [0, 1) \Rightarrow q^n \xrightarrow{n} 0$.

Zusammenfassung:
$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind metrische Räume mit $d(x, y) = |x - y|$.
$\mathbb{R}$ ist vollständig, jedoch $\mathbb{Q}$ nicht.

3.5.2 Konvergenz in $\mathbb{R}^n$

Sei $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x = (x^1, ..., x^n)$
Sei $(x_k)_k$ Folge in $\mathbb{R}^n \Rightarrow x_k = (x_k^1, ..., x_k^n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Satz 3.40. Sei $(x_k)_k$ Folge in $\mathbb{R}$ und $(x \in \mathbb{R}^n)$. Dann sind äquivalent:

a) $x_k \xrightarrow{k} x$ bzgl. $d_1(y,z) := ||y-z||_1$

b) $x_k \xrightarrow{k} x$ bzgl. $d_2(y,z) := ||y-z||_2$

c) $x_k \xrightarrow{k} x$ bzgl. $||y-z||_\infty$

d) $x_k^j \xrightarrow{k} x^j$ für jedes $j = 1, ..., n$ (komponentenweise).

Beweis. *a)* $\Rightarrow$ *b)*
Sei $||x_k - x||_1 \xrightarrow{k} 0$. Aus $0 \leq ||x_k - x||_2 \leq ||x_k - x||_1$ folgt $||x_k - x||_2 \xrightarrow{k} 0 \Rightarrow x_k \xrightarrow{k} x,$ bzgl. d_2.
b) $\Rightarrow$ *c)* : Analog mit $||\cdot||_\infty \leq ||\cdot||_1$.
c) $\Rightarrow$ *d)* : Sei $||x_k - x||_\infty = \max_{j=1,...,n} |x_k^j - x^j| \xrightarrow{k} 0$.
D.h. für $\varepsilon > 0$, dann existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $||x_k - x||_\infty < \varepsilon$ für $k \geq n_\varepsilon$
$\Rightarrow |x_k^j - x^j| < \varepsilon$ für jedes $j = 1...n$ und $k \geq n_\varepsilon$
$\overset{\varepsilon>0 \text{ bel.}}{\Rightarrow} x_k^j \xrightarrow{k} x^j$ und $j = 1, ..., n$.
d) $\Rightarrow$ *a)* : $||x_k - x||_1 = \sum_{j=1}^n |x_k^j - x^j| \xrightarrow{k} 0$ für jedes $j = 1, ..., n$ daraus folgt, dass $\underbrace{\sum_{j=1}^n |x_k^j - x^j|}_{||x_k - x||_1} \xrightarrow{k} 0$, da die Summe konvergenter Folgen gegen die Summe der Grenzwerte konvergiert. $\Rightarrow x_k \xrightarrow{k} x$ bzgl. d_1. □

Bemerkung 3.41. Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$

a) $x_k \to x, y_k \to y \Rightarrow x_k + y_k \to x + y$ in $\mathbb{R}^n$ (Addition)

b) $x_k \to x$ in $\mathbb{R}^n$, $s_k \to s$ in $\mathbb{R} \Rightarrow s_k x_n \to sx$ (Streckung)

3.5.3 Spezielle Folgen in $\mathbb{R}$

Wir wollen nutzen, dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist.

Definition 3.42. Sei $(x_n)_n$ Folge in $\mathbb{R}$. Dann heißt $(x_n)_n$ *wachsend (fallend)*, falls $x_1 \leq x_2 \leq ...$, $(x_1 \geq x_2 \geq ...)$.
Kann man $\leq$ durch $<$ ersetzen, so spricht man von strikt wachsend.

Beispiel 3.43.

i) $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ ist strikt fallend.

ii) $(\min\{n, 1000\})_n$ ist wachsend.

iii) $1 - 2^{-n}$ ist strikt wachsend.

iv) $(n)_n$ ist strikt wachsend und divergent in $\mathbb{R}$.

Satz 3.44. Sei $(x_n)_n$ wachsende, beschränkte Folge in $\mathbb{R}$.
Dann konvergiert $(x_n)_n$ gegen $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup_n(x_n)$

Beweis. Sei $x := \sup_n(x_n)$
Es gilt $x \in \mathbb{R}$, da $(x_n/n$ beschränkt
Sei $\varepsilon > 0$. Dann exisitert nach Def. von Supremum n_ε mit $x - \varepsilon \leq x_{n_\varepsilon} \leq x$
$\Rightarrow x - \varepsilon \leq x_{n_\varepsilon} \leq x_m \leq x$ für alle $m \geq n_\varepsilon$ und damit also $|x_m - x| \leq \varepsilon$ für alle $m \geq n_\varepsilon$.
$\overset{\varepsilon>0 \text{ bel.}}{\Rightarrow} x_m \to x$. □

Schreibweise: $(x_n)_n$ wachsend $\Leftrightarrow$: $x_n \nearrow$
$(x_n)_n$ wachsend und $x_n \to x \Leftrightarrow$: $x_n \nearrow x$
analog: $x_n \searrow x$(fallend).

Bemerkung 3.45. Jede beschränkte fallende Folge konvergiert. $x_n \searrow x \Leftrightarrow (-x_n) \nearrow (-x)$

Wachsende Folgen in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Definition 3.46. Sei $(x_n)_n$ Folge in $\mathbb{R}$ (bzw: $\bar{\mathbb{R}}$). Wir sagen $x_n \to \infty$ falls für jedes $K \in \mathbb{N}$ ein n_K existiert, so dass $x_n \geq K$ $(x_n \leq -K)$
für alle $n \geq n_K$.

Beispiel 3.47.
i) $n \overset{n}{\to} \infty$
ii) $2^n \overset{n}{\to} \infty$
iii) $-n^n \to -\infty$

Achtung: $2^n \to \infty$. D.h. 2^n divergiert in $\mathbb{R}$ aber 2^n konvergiert in $\bar{\mathbb{R}}$ gegen ∞. Man sagt auch:
i) 2^n divergiert bestimmt gegen ∞.
ii) 2^n konvergiert uneigentlich gegen ∞.

Lemma 3.48. Jede wachsende Folge konvergiert in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Beweis. Fall $(x_n)_n$ beschränkt: $\Rightarrow$ *s.o* Konvergenz in $\mathbb{R}$
Fall $(x_n)_n$ unbeschränkt: Sei $K > 0$, dann existiert n_k mit $x_{n_k} \geq K \overset{\text{wachsend}}{\Rightarrow} x_n \geq K$ für alle $n \geq n_K$. $\Rightarrow x_n \to \infty$. □

3.5.4 Limes Inferior + Limes Superior

Sei $(x_n)_n$ Folge aus $\mathbb{R}$
Sei $a_n := \sup_{k \geq n} x_k \Rightarrow a_1 \geq a_2 \geq ...$, d.h.$a_n \searrow$. Da $\sup_{k \geq n+1} x_k := \max\{x_{n+1}, \sup_{k \geq n} x_k\} \geq \sup_{k \geq n} x_n)$
Anmerkung - Schreibweise:
$\sup_{k \geq n} x_k = \sup\{x_k : k \geq n\}$. Der $\lim_n a_n$ existiert in $\mathbb{R}$ falls $(a_n)_n$ beschränkt ist.

Definition 3.49. Sei $(x_n)_n$ eine Folge aus $\mathbb{R}$, dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} (\sup_{k \geq n} x_k) \quad \text{(Limes Superior)}$$

$$\text{und } \liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} (\inf_{k \geq n} x_k) \quad \text{(Limes Inferior)}$$

Bemerkung 3.50. Allgemein ist $\limsup_{n\to\infty} a_n \in \bar{\mathbb{R}}$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n \in \bar{\mathbb{R}}$

Bemerkung 3.51. Ist $(x_n)_n$ beschränkt, so is $(\sup_{k\geq n} x_k)_n$ beschränkt.
$\Rightarrow \overline{\lim}_n x_n \in \mathbb{R}$ analog $\underline{\lim}_n x_n \in \mathbb{R}$.

Beispiel 3.52. a)

$$((-1)^n)_n = (-1, 1, -1, 1, ...) \Rightarrow \sup_{k\geq n} (-1)^k = 1$$
$$\Rightarrow \limsup_n (-1)^n = 1$$
$$\inf_{k\geq n} (-1)^k = (-1) \to \liminf_n (-1)^n = -1$$

b) Beispiel in $\mathbb{R}$

$$\limsup_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} n) = \infty$$

c)

$$(x_n)_n := (0, 1, 2, 0, 1, 2, ...) \to \overline{\lim} x_n = 2 \text{ und } \underline{\lim} x_n = 0$$

07.11.2013

Lemma 3.53. Sei $(x_n)_n$ nach oben beschränkt, dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ so, dass $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$

Beweis. Wir wissen, dass $a_n \searrow x$, wobei $a_n = \sup_{k\geq n} x_k$ und $x = \lim_{n\to\infty} a_n$. Wir konstruieren $n_k \in \mathbb{N}$ strikt wachsend in k, so dass $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$ ist.
Sei $n_0 = 0$. Nun rekursive Konstruktion (n_{k-1}) sei bekannt; Aufgabe: finde n_k.
Wissen: $|x_{n_{k-1}} - x| < \frac{1}{k-1}$. Wollen ein n_k s.d. $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$.
Wir nutzen aus, dass $a_n \searrow x$ geht, d.h. wir suchen ein $m_k \geq n_{k-1}$ so, dass $x \leq a_{m_k} < x + \frac{1}{k}$
Da $a_{m_k} = \sup_{j\geq m_k}(x_j)$, d.h. $\exists n_k \geq m_K$
so dass $|a_{m_k} - xn_k| \leq \frac{1}{k}$
$\Leftrightarrow a_{m_k} - \frac{1}{k} \leq x_{n_k} \leq a_{m_k} < x + \frac{1}{k}$
$\Rightarrow |x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$ □

Definition 3.54. Sei $(x_n)_n$ eine reelle Folge. Dann heißt x *Häufungspunkt*, falls es eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ gibt, mit $(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} x$

Bemerkung 3.55. $\limsup_{n\to\infty} x_n$ ist Häufungsunkt (siehe letztes Lemma). Ausserdem ist es der größte Häufungspunkt.

Beispiel 3.56. $(-1)^n \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$ demensprechend gibt es 2 Häufungspunkte.

Satz 3.57. Bolzano-Weierstraß: Sei $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann existiert eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $x = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n < \infty$. Dann exisitert eine Teilfolge $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x$ konvergiert. □

Satz 3.58. Sei $(x_n)_n$ konvergent gegen x in $\mathbb{R}$, so folgt:
a) $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}\, x_n$
b) Wenn $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = x = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \Rightarrow x_n$ konvergent.

Beweis. a)
Sei $\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n \geq n_\varepsilon |x_n - x| \leq \varepsilon \Rightarrow |\sup x_n - x| \leq \varepsilon$.
bzw $\Rightarrow |\inf_{n\geq n_\varepsilon} x_n - x| \leq \varepsilon$ □

Beweis. b)
Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

$$|x - \sup_{n\geq n_\varepsilon}(x_n)| \leq \varepsilon$$
$$|x - \inf_{n\geq n_\varepsilon}(x_n)$$

□

Folgerung (von B-W)
Sei $(x_k)_k$ beschränkt in $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine konvergente Teilfolge.

Beweis. $(x_k^1)_k$ ist beschränkte Folge, dann existiert $Tf : x_{kj}^1 \xrightarrow{\alpha\to\infty} x^1$ wegen B-W in 1-Dim.
$(x_{kj}^2)_j$ ist beschränkt.
$\Rightarrow \exists$ eine konvergente Teilfolge. $x_{kj}^2 \xrightarrow{i\to\infty} x^2$.
Dies iteriere ich von $x^2 \xrightarrow{TF} x^3 \xrightarrow{TF} x^4 \xrightarrow{TF} x^n$, so dass $x_{j_{1_{j_2 \cdots j_n}}}$ □

3.6 Reihen

Definition 3.59. Sei $(x_k)_k$ eine Folge in $\mathbb{R}$ ihre Summenfolge

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

heißt *Reihe*. Notation:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ oder } \sum_k x_k \text{ oder } \sum x_k$$

Eine Reihe heißt konvergent, wen $\lim S_k = s$ existiert.

$$\text{Notation: } \sum_{k=1}^{\infty} k = S.$$

Beispiel 3.60. $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ ist für $a \in [0,1)$ konvergent.
Beweis. $(1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k = a^0 - a^1 + a^1 - a^2 + \cdots - a^n + a^n - a^{n+1} = a^0 - a^{n+1} = 1 - a^{n+1}$
$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-a^n+1}{k=0} x^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, da $a < 1 \Rightarrow a^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty}$
$\Rightarrow S_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1-0}{1-a}$

Beispiel 3.61. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent.
Sie ist monoton wachsend. ✓
Zeige $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ ist beschränkt.
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} ... \leq 1 + \sum k = 2^n \frac{1}{k(k-1)}$
$\left[Nebenrechnung: \frac{1}{k} + \frac{1}{k(k-1)} = \frac{k-1+1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1}\right]$
$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} ... - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$
$= 2 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2 \Rightarrow$ Konvergenz

Beispiel 3.62. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergiert gegen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$
$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}}.$

Genauer:
$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{n}$
$\underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n}}_{n-mal}$
Nun gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} + \sum_{k=5}^{8} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j}^{2} \frac{1}{k} \geq 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

Berechnung:
$\frac{1}{n}$ ist Nullfolge, trotzdem konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht!

11.11.2013

Beispiel 3.63. a) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ für $|a| < 1$ Mit der Konvention $a^0 = 1$ immer oder $a \neq 0$.
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ Harmonische Reihe.
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert und ist ≤ 2.

Lemma 3.64. Sei $x_n \xrightarrow{n} x$ in $\mathbb{R}$. Dann gilt $x_{n+1} - x_n \xrightarrow{n} 0$.

Beweis. $\overset{x_n \to x}{\Rightarrow} x_n$ ist Cauchyfolge.
D.h. zu $\varepsilon > 0$ ex. $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ für $n > n_\varepsilon$ (Spezialfall)
$\overset{\varepsilon \text{ beliebig}}{\Rightarrow} x_{n+1} - x_n \xrightarrow{n} 0.$ □

Lemma 3.65. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so gilt $a_n \xrightarrow{n} 0$.
Rückrichtung ist falsch (harmonische Reihe!)

Beweis. $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ konvergente Partialsumme.
$\overset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} \underbrace{s_{n+1} - s_n}_{a_{n+1}} \overset{n}{\to} 0 \Rightarrow a_n \overset{n}{\to} 0$ □

Rechenregeln (für konvergente Reihen!):
a) $\sum_{n=0}^\infty a_n + \sum_{n=0}^\infty b_n = \sum_{n=0}^\infty (a_n + b_n)$
b) $\alpha \sum_{n=0}^\infty a_n = \sum_{n=0}^\infty (\alpha a_n)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$
zu a):

$$\sum_{n=0}^N a_n + \sum_{n=0}^N b_n = \sum_{n=0}^N (a_n + b_n) \quad \checkmark \text{endliche Summe}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^\infty a_n + \sum_{n=0}^\infty b_n = \sum_{n=0}^\infty (a_n + b_n) \leftarrow \text{ da Summe konvergenter Folgen konvergiert.}$$

b) analog.

3.6.1 Konvergenzkriterien

$$x_n \to x \text{ in } \mathbb{R} \Leftrightarrow x_n \text{ ist eine Cauchyfolge}$$

Satz 3.66 (Cauchy-Kriterium für Reihen)**.** Es sind äquivalent
a) $\sum_{n=0}^\infty x_n$ konvergent
b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\left|\sum_{k=n+1}^m x_k\right| < \varepsilon$ für $m > n \geq n_\varepsilon$

Beweis.

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_n \text{ Partialsumme}$$
$$\left|\sum_{k=n+1}^m x_k\right| = |s_m - s_n|$$

D.h. b) ist genau das Cauchykriterium für Folge $(s_n)_n$. Und a) ist genau "$(s_n)_n$ konvergiert."
Also: *a)* $\Leftrightarrow$ *b)* nach Cauchy-Kriterium für Folgen. □

Sei $s_n \nearrow$. Sei $a_0 := s_0$ und $a_{n+1} := s_{n+1} - a_n$.
dann gilt $\sum_{k=0}^n a_k = s_n$.
Also $s_n \nearrow \Leftrightarrow a_n \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Satz 3.67. Sei $(a_n)_n$ Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Sei s_n die Partialsumme, d.h. $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$.
Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k$ genau dann in $\mathbb{R}$, falls $(s_n)_n$ beschränkt ist.

Beweis. Aus $a_n \geq 0$ folgt $s_n \nearrow$.
$\Rightarrow$ Behauptung, da monoton wachsende Folgen genau dann konvergieren, wenn sie beschränkt sind. $\square$

Bemerkung 3.68. Ist $x_n \geq 0$ eine Folge, so "konvergiert" die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ immer in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Beispiel 3.69. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Insbesondere ist $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ für $x_n \geq 0$ wohldefiniert.

Bemerkung 3.70. Sei $x_n \geq 0$ eine Folge, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup_n \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right)$$

(Wachsende Folge konvergiert gegen Supremum!)

3.6.2 Alternierende Reihen

Beispiel 3.71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = (-1) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) + ...$

Beobachtung:
a)

$$\frac{(-1)^{2n}}{2n} + \frac{-1}{2n+1} = \text{ zusammenfassen}$$
$$= \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4}\frac{1}{n(n+1)} \approx \frac{1}{4}\frac{1}{n^2} \leftarrow \text{ Diese Reihe konvergiert.}$$

b) $s_{2n} \searrow$, $s_{2n+1} \nearrow$ und $s_{2n+1} \leq s_{2n}$.

Satz 3.72. (Alternierende Reihen)
Sei $a_n \searrow 0$ (monoton fallende Nullfolge). Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Beweis. Sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n a_k$.
Dann ist $(s_{2n}) \searrow$ da $s_{2(n+1)} - s_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$.
Denn es gilt $0 \leq a_{2n+2} \leq a_{2n+1} \Rightarrow s_{2(n+1)} \leq s_{2n}$.
Es gilt auch $s_{2n+1} \nearrow$ (Beweis analog).
Außerdem: $s_1 \leq s_{2n+1} = s_{2n} + \underbrace{\underbrace{(-1)^{2n+1}}_{-1} \underbrace{a_n}_{\geq 0}}_{\leq 0} \leq s_{2n} \leq s_0$.

$\Rightarrow s_{2n} \searrow$ und $(s_{2n})_n$ ist durch s_1 nach unten beschränkt.
$s_{2n+1} \nearrow$ und $(s_{2n+1})_n$ ist durch s_0 nach oben beschränkt.

$$\Rightarrow \exists s, t, \in \mathbb{R} : s_{2n} \searrow t \text{ und } s_{2n+1} \nearrow s.$$

$$t - s = (\lim_{n\to\infty} s_{2n}) - (\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n+1}) = -(-1)^{2n+1}a_{2n+1}$$
$$= \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} \overset{a_n\to 0}{=} 0 \text{ (Teilfolge)}$$
$$\Rightarrow s = t$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (Maximum für beide Folgen) s.d.

$$\text{für } n \geq n_\varepsilon \begin{cases} |s_{2n} - s| < \varepsilon \\ |s_{2n+1} - s| < \varepsilon \end{cases}$$

Daraus folgt $|s_k - s| < \varepsilon$ für $k \geq 2n_\varepsilon$. $\overset{\varepsilon \text{ beliebig}}{\Rightarrow} s_k \to s \Rightarrow$ Beh! □

Folgerung:
Sei $a_n \searrow 0$, $s_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ und $s_n \to s$.
Dann gilt $|s_n - s| \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. $s_{2n-1} \leq s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n}$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow 0 \leq s_{2n} - s \leq s_{2n} - s_{2n+1} &= a_{2n+1} \\ \text{und } 0 \leq s - s_{2n-1} \leq s_{2n} - s_{2n-1} &= a_{2n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow |s_k - s| \leq a_{k+1} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

□

Daraus folgt: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergiert!

3.6.3 Absolute Konvergenz

Beobachtung: Bei Reihe mit wechselndem Vorzeichen, kann eine Umsortierung den Wert ändern!

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = (-1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \pm ...$$

Kurze "-"-Blöcke, längere "+"-Blöcke.

$$\boxed{(-1)} \quad \boxed{-\frac{1}{3}} \quad \boxed{-\frac{1}{5}} \quad \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{100} \geq 2} \quad \boxed{\frac{1}{102} + ... + \frac{1}{1000} \geq 2}$$

Und

$$\underbrace{\boxed{(-1)} + \boxed{-\frac{1}{3}} + \boxed{-\frac{1}{5}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{100}}}_{\geq 2} + \underbrace{\boxed{-\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{102} + ... + \frac{1}{1000}}}_{\geq 1}}_{\geq 2} + \cdots = \infty$$

Definition 3.73. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ (d.h. konvergiert).

Beispiel 3.74. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist absolut konvergent.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist nicht absolut konvergent, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

14.11.2013

3.7 Absolute Konvergenz

Falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$, so heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beispiel 3.75.

	konvergiert	konvergiert absolut
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	f	f
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{n}$	✓	f
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{n^2}$	✓	✓

Lemma 3.76. Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

Beweis. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Leftrightarrow$ Cauchy-Kriterium.
Also zu $\varepsilon > 0$ ex. n_ε : $\left|\sum_{n=m+1}^{N} |a_n|\right| < \varepsilon$ für $N > m \geq n_\varepsilon$.
$\Rightarrow \left|\sum_{n=m+1}^{N} a_n\right| \leq \left|\sum_{n=m+1}^{N} |a_n|\right| < \varepsilon$ für alle $N > m \geq n_\varepsilon$.
Mit dem Cauchy Kriterium folgt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert (in $\mathbb{R}$). □

Zur Erinnerung:
$x_n \to x$ impliziert $|x_n| \to |x|$.
Folgt aus $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$ (Dreiecksungleichung)

Lemma 3.77. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so gilt $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$

Beweis. $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n|$ und dann $N \to \infty$. □

Benutzt: Wenn $x_n \leq y_n$ und $x_n \to x,\ y_n \to y$ so gilt $x \leq y$
Frage:
Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$? konvergent?

Definition 3.78. Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen.

a) Gilt $0 \leq |a_n| \leq b_n$, so heißt $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *Majorante* von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

b) Gilt $0 \leq b_n \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *Minorante* von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Bemerkung 3.79. Man spricht auch von Majorante, falls $0 \leq |a_n| \leq b_n$ für alle $n \geq N$ gilt.

Satz 3.80. a) Hat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

b) Besitzt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Minorante mit $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$, so gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$.

Beweis. Übungsblatt! □

Beispiel 3.81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ hat Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, da $\left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| = \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$ für $n \geq 1$
$\to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ konvegiert absolut!

Beispiel 3.82. $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, Es gilt $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ für $k \geq 1$
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ ist Minorante $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$.

Bemerkung 3.83. (Geometrische Reihe)
$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$.
Falls $|q| < 1$, so gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad [q^0 = 1] = 1 + q + q^2 + ...$
Falls $|q| \geq 1$, so ist q^k keine Nullfolge.

Satz 3.84 (Wurzelkriterium)**.** Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Sei $\alpha := \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$

a) Falls $\alpha < 1$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
b) Falls $\alpha > 1$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht.
c) Falls $\alpha = 1$, kann alles passieren: Konvergenz oder Nicht-Konvergenz oder abs. Konvergenz.

Beweis. a) Sei $\alpha < 1$ dann für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q := \frac{\alpha+1}{2} < 1$
(alle bis auf endlich viele; zB für alle $n \geq N$.)
$\Rightarrow |a_n| \leq q^n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ Majorante von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (endlich viele Ausnahmen)
$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut $\Rightarrow$ a). □

Beweis. b) Sei $\alpha > 1$, $q := \frac{\alpha+1}{2} \in (1, \alpha)$.
$\Rightarrow \exists$ Teilfolge mit $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \alpha > q > 1$
$\Rightarrow \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq q > 1$ für fast alle k.
$\overset{(\cdot)^{n_k}}{\Rightarrow} |a_{n_k}| \geq 1^{nk} = 1$ für fast alle k.
$\Rightarrow a_{n_k} \nrightarrow 0$ für $k \to \infty \Rightarrow a_n \nrightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert nicht. □

Beweis. c)

	konvergiert	konvergiert absolut	α	
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$	f	f	1	$\sqrt[k]{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k} 1$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$	✓	✓	1	$\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} \xrightarrow{k} 1$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$	✓	f	1	$\sqrt[k]{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k} 1$

□

Lemma 3.85. $\sqrt[n]{n} \to 1$

Kurzidee:

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = (\exp(\ln(n)))^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n} \cdot \ln(n)) \to e^0 = 1$$

Einschub: spezielle Folgen:

Lemma 3.86 (Bernoullische Ungleichung)**.** Sei $x \geq -1$. Dann gilt:
$(1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Beweis. $n = 0$: $1 \geq 1$
$n \mapsto n+1:$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) &\overset{IV}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

□

Lemma 3.87. Sei $b \in \mathbb{R}, b \geq 0$

a) Aus $b > 1$ folgt $b^n \to \infty$
b) Aus $b < 1$ folgt $b^n \to 0$

Beweis. a) Sei $b > 1 \Rightarrow x := b - 1 > 0$
$\Rightarrow b^n = (1+x)^n \geq 1 + nx \overset{n}{\to} \infty$ Bern. Ungl
$\Rightarrow b^n \to \infty$

b) Sei $b < 1 \Rightarrow \frac{1}{b} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{b}\right)^n \to \infty$.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{1}{b^n}\right)}}_{b^n} \to 0 \Rightarrow b^n \to 0$$

□

Bemerkung 3.88. $a_n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$.

Bemerkung 3.89. $a_n \to 0, a_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \infty$.

Lemma 3.90. Sei $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$. Dann gilt: $(1+x)^n \geq 1 + \frac{(nx)^2}{4}$ für alle $n \geq 2$.

Beweis.

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} x^j \\ &= 1 + nx + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} x^2 + \cdots + x^n\end{aligned}$$

$$\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \geq 1 + \frac{n^2}{4} \cdot x^2 \quad \text{mit } n-1 \geq \frac{n}{2} \text{ für } n \geq 2.$$

□

Lemma 3.91. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$

Beweis. $n = 1: \quad 1 \leq 1 \leq 3$✓
$n \geq 2: \quad \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + \cancel{\tfrac{1}{4}}\left(\cancel{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)^2 n\cancel{n} = 1 + n \geq n$
$\overset{\sqrt[n]{}}{\Rightarrow} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geq \sqrt[n]{n}$ □

Folgerung: $\sqrt[n]{n} \to 1$

Beweis.

$$\underbrace{1}_{\to 1} \leq \sqrt[n]{n} \leq \underbrace{1 + \frac{2}{\sqrt{n}}}_{\to 1} \Rightarrow \sqrt[n]{n} \to 1$$

□

18.11.2013

Satz 3.92. (Quotientenkriterium)
Sei $\sum_{n=K_0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für $n \geq K_0$

a) Gibt es ein $q \in [0,1)$ mit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$ für alle $n \geq K_0$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
b) Gilt $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ für alle $n \geq K_0$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht.

Beweis. zu b)
$\overset{\text{Induktion}}{\Rightarrow} |a_k| \geq |a_{K_0}|$ für alle $k \geq K_0$.
Daraus folgt: $|a_k| \not\to 0$. Daraus folgt: keine Konvergenz! (da Summanden keine Nullfolge sind).

zu a)

$$|a_{\underbrace{K_0+2}_{=:k}}| \leq q|a_{K_0+1}| \leq \underbrace{q^2}_{q^{k-K_0}} |a_{K_0}|.$$

Allgemeiner zeigt man per Induktion: $|a_k| \leq q^{k-K_0}|a_{K_0}| = q^k \left(q^{-K_0}|a_{K_0}|\right)$ für $k \geq K_0$.
Daraus folgt: $\sum_{k=0}^{\infty} \left[q^k \cdot \left(q^{-K_0}|a_{K_0}|\right)\right] = q^{-K_0}|a_{K_0}| \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} q^k}_{\text{geometrische Reihe}} = q^{-K_0}|a_{K_0}| \frac{1}{1-q} < \infty.$
Daraus folgt: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(q^k q^{-K_0}|a_{K_0}|\right) < \infty$ ist Majorante von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (ab $k \geq K_0$).
Daraus folgt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absoult. □

Beispiel 3.93. Negativbeispiel:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n} 1.$
$\Rightarrow \nexists q \in [0,1)$ mit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$ für fast alle n.
Ausserdem $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 1$ für alle n.
Also, weder a) noch b) treffen zu. Daraus folgt: Das Quotientenkriterium ist in diesem Fall nicht anwendbar.

Beispiel 3.94. $\sum_{k=0}^{\infty}(k^2 2^{-k})$

Wurzelkriterium: $\sqrt[k]{k^2 2^{-k}} = \underbrace{\left(\underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\to 1}\right)^2}_{\to 1^2 = 1} \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$. Daraus folgt: $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2} < 1$.
Daraus folgt: Absolute Konvergenz!.

Quotientenkriterium: $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{(k+1)^2 2^{-k-1}}{k^2 2^{-k}} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} < 1.$
Daraus folgt: $\exists K_0$ mit $\frac{|a_k+1|}{|a_k|} \leq \frac{3}{4} < 1$ für $k \geq K_0$.
Daraus folgt: Absolute Konvergenz!.

Beispiel 3.95. $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $z \in \mathbb{R}$ (Ist diese Reihe wohldefiniert?)

Wir prüfen mit dem Wurzelkriterium:
$\sqrt[k]{\frac{|z|^k}{k!}} = \frac{|z|}{\sqrt[k]{k!}} \to ?$ Mit dem Wurzelkriterium nicht möglich.

Quotientenkriterium:
$\frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{|z|^k} = \frac{|z|}{k+1} \xrightarrow{k} 0$ bzw $\frac{|z|}{k+1} \leq \frac{1}{2}$ für $k \geq 2|z|$.
Daraus folgt: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert für jedes feste $z \in \mathbb{R}$ absolut.
Daraus folgt: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist wohldefiniert.
(Später: $\exp(z) = e^z$)

Definition 3.96 (Umordnung von Reihen)**.** Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Bijektion. Dann heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ *Umordnung* von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Satz 3.97. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k =: \alpha$ absolut konvergent. Dann konvergiert jede Umordnung absolut gegen α.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Cauchykriterium existiert $N \in \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{k=N+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$ für $m > N$.
$\overset{m\to\infty}{\Rightarrow} \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$.
Sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ Bijektion und $M := max\{\sigma^{-1}(0), \ldots, \sigma^{-1}(N)|$. Daraus folgt: $\{0, \ldots, N\} \subset \{\sigma(0), \ldots, \sigma(M)\}$.
Für $m \geq M$ gilt:

a) $\left|\sum_{k=0}^{m} a_{\sigma(k)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{N} a_k}_{\text{jeder Summand ist in der linken Summe!}}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon.$

(Verwende die Dreiecksungleichung auf Rest der linken Summe).

b) $\left|\sum_{k=0}^{m} |a_{\sigma(k)}| - \sum_{k=0}^{N} |a_k|\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon$ (analog zu a)).

Aus b) folgt: $\sum_{k=0}^{m} |a_{\sigma(k)}| \leq \underbrace{\underbrace{\left|\sum_{k=0}^{m} |a_{\sigma(k)}| - \sum_{k=0}^{N} |a_k|\right|}_{<\varepsilon} + \sum_{k=0}^{N} |a_k|}_{\text{unabhängig von } m \text{ beschränkt!}}$

Daraus folgt: $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{\sigma(k)}| < \infty$ (absolute Konvergenz!)

Aus a) folgt mit $m \to \infty$: $\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{N} a_k\right| \leq \varepsilon.$

Daraus folgt: $\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k}_{=\sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k}\right| \leq \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{N} a_k\right|}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k\right|}_{\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon} \leq 2\varepsilon$

$\overset{\varepsilon>0 \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}}_{\text{beliebige Umordnung}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$ □

Rechenregel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{m} a_n}_{\text{endliche Summe}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

Falls eine Reihe konvergiert, so auch die andere und $(*)$ gilt.

Multiplikation von Reihen:

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_j b_k = \left(\sum_{j=0}^{m} a_j\right) \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right).$$

$$\begin{array}{ccc} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 \\ a_1b_0 & a_1b_1 & \cdots \\ a_2b_0 & a_2b_2 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \end{array}$$

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) =?$$

a) Zeilensummen: $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(a_j b_k)\right)$

b) Spaltensumme: $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(a_j b_k)\right)$

c) Diagonale: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} \underbrace{a_m b_{n-m}}_{\text{Summe der Indizes}=n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m\right)$

Definition 3.98. Die *Doppelreihe* $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}$ heißt summierbar, falls

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{i,j=0}^{n} |a_{ij}| < \infty.$$

Satz 3.99. Sei $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}$ eine summierbare Doppelreihe. Dann gilt:

a) Jede Anordnung $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\alpha(n)}$ (mit $\alpha : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ Bijektion) konvergiert absolut und hat den gleichen Wert $s \in \mathbb{R}$. ($\Rightarrow \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}$ ist wohldefiniert.)

b) Die Reihe der Zeilensumme konvergiert absolut mit Wert s.

c) Die Reihe der Spaltensumme konvergiert absolut mit Wert s.

Beweis. zu a). Sei $N \in \mathbb{N}_0$ fest.
Dann existiert ein $K \in \mathbb{N}_0$ mit $\{\alpha(0), \dots, \alpha(N)\} \subseteq \{(j,k) : 0 \le j,k \le K\}$.
$\sum_{n=0}^{N} |a_{\alpha(n)}| \le \sum_{j,k=0}^{K} |a_{jk}| \le \sup_{m\in\mathbb{N}_0} \sum_{j,k=0}^{m} |a_{jk}| =: M < \infty$.
Daraus folg (mit $N \to \infty$): $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\alpha(n)}| \le M < \infty$ (absolute Konvergenz).
Nach Umordnungssatz konvergiert jede Umordnung gegen den gleichen Wert!

Sei $\beta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine andere Bijektion. Daraus folgt: $\sigma := \alpha^{-1} \circ \beta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ist auch eine Bijektion.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\alpha(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\beta(\sigma^{-1}(k))} \underbrace{=}_{\text{Umordnungssatz}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{\beta(k)}$$

Daraus folgt: a).
b) - Ohne Beweis! □

21.11.2013

Cauchyprodukt:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) =?$$

Definition 3.100. Seien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ Reihen. Dann heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\right)$ Cauchyprodukt.

Bemerkung 3.101. i) Stichwort "Faltung".

ii) Motivation: Später

$$\sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{(a_j x^j)}_{\text{abs. konv.}} \sum_{k=0}^{\infty} (\underbrace{b_k x^k}_{\text{abs konv}}) \stackrel{?}{=} \sum_{j,k=0}^{\infty} (a_j b_k x^{j+k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \right) x^n \right)$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Satz 3.102. Seien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent. Dann ist $\sum_{j,k=0}^{\infty} a_j b_k$ summierbar und das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}}_{=\sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m})$ konvergiert absolut.

Beweis. Sei $x_{jk} = a_j b_k$. Sei $N \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} |x_{jk}| = \left(\sum_{j=0}^{N} |a_j| \right) \left(\sum_{k=0}^{N} |b_k| \right) \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right) < \infty$$

Daraus folgt: Doppelreihe ist summierbar!

Aus Doppelreihensatz folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\right)$ absolut konvergiert, denn.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \right| \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} |a_m b_{n-m}| \right)}_{\text{Umordnung von } \sum_{j,k} |a_j b_k| \text{ (Teilfolge der Umordnung)}}$$

□

Satz 3.103. Seien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent.
Dann gilt: $\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\right)$

Beweis.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \right) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_j b_k \stackrel{N}{\leftarrow} \sum_{j,k=0}^{N} a_j b_k = \sum_{j=0}^{N} a_j \sum_{k=0}^{N} b_k \stackrel{N}{\rightarrow} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

□

Beispiel 3.104. (Exponentialreihe)
Beh: $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$ für $x, y, \in \mathbb{R}$.

$$\exp(x)\exp(y) \overset{def}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}}_{\text{konv. jeweils abs.}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^{n-m}}{(n-m)!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = \exp(x+y).$$

Definition 3.105. $e := exp(1)$ Euler'sche Zahl. Später zeigen wir: $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Folgerung:
$\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

$n = 0$	$\exp(0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{0^j}{j!} = 1$
$n = 1$	✓
$n \mapsto n+1$	$\exp(n+1) = \exp(n) \cdot exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1}$✓
$\boxed{n < 0 : n = -m}$	$1 = \exp(0) = \exp(-m)\exp(m) \Rightarrow \exp(-m) = \frac{1}{\exp(m)} = \frac{1}{e^m} = e^{-m}$

$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p} \Rightarrow \exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q}}$ für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $\quad \left(\exp\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \exp\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = e$

4 Stetige Abbildungen

Idee: Kleine Änderungen in x bewirken kleine Änderungen von $f(x)$.

Definition 4.1. Eine Abbildung (Funktion) $f : (X,d) \to (Y,d')$ (mit $(X,d), (Y,d')$ metrische Räume) heißt stetig in x_0, falls:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : d(x,x_0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Fall $X = Y = \mathbb{R} : [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$

$B_{\delta(\varepsilon)}(x_0) := \{x : d(x,x_0) < \delta(\varepsilon)\}$.

Bemerkung 4.2. $f : (X,d) \to (Y,d')$ ist stetig in $x_0 \in X$, falls zu jedem Ball $B_\varepsilon(f(x_0))$ ein Ball $B_\delta(x_0)$ existiert mit $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.

Beispiel 4.3. Jede konstante Funktion $f : (X,d) \to (Y,d')\quad x \mapsto y_0$ mit $y_0 \in Y$ fest. $f(x) = y_0$.
Daraus folgt: f ist stetig (in jedem Punkt). Denn $d(f(x), f(x_0)) = d(y_0,y_0) = 0 < \varepsilon$ für alle $x \in X$.

Definition 4.4. Falls $f : (X,d) \to (Y,d')$ in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist, so heißt f *stetig*.

Beispiel 4.5. a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a,b) \mapsto a + b$.

Erinnerung:

$$|(a,b) - (\tilde{a},\tilde{b})| = \sqrt{|a-\tilde{a}|^2 + |b-\tilde{b}|^2} \text{ Euklidischer Abstand}$$
$$||(a,b) - (\tilde{a},\tilde{b})||_1 = |a-\tilde{a}| + |b-\tilde{b}|$$
$$||(a,b) - (\tilde{a},\tilde{b})||_\infty = \max\left\{|a-\tilde{a}|, |b-\tilde{b}|\right\}$$

$$d_\infty \le d_2 \le d_1 \le n d_\infty$$
$$||\cdot||_\infty \le ||\cdot||_2 \le ||\cdot||_1 \le n||\cdot||_\infty$$

$$|f(a,b) - f(a_0,b_0)| = |a + b - (a_0 + b_0)| \le |a - a_0| + |b - b_0|$$
$$= d_1((a,b),(a_0,b_0)) < \varepsilon$$

falls $d_1((a,b),(a_0,b_0)) < \delta$ mit $\delta := \varepsilon$. ($\le 2d_\infty((a,b),(a_0,b_0))$, dann $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$.)

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

$$\begin{aligned}|g(x) - g(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| = |x + x_0||x - x_0| \\ &\leq (2|x_0| + |x - x_0|)|x - x_0| \text{ für } |x - x_0| < 1 \\ &< (2|x_0| + 1)|x - x_0|\end{aligned}$$

Daraus folgt: $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ falls $|x - x_0| < \delta$ mit $\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right\}$.
Daraus folgt: $g(x) = x^2$ ist stetig.

c) $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto ab$.

$$\begin{aligned}|h(a,b) - h(a_0, b_0)| &= |ab - a_0 b_0| \\ &= |(a - a_0)b + a_0(b - b_0)| \\ &\leq |b||a - a_0| + |a_0||b - b_0| \\ &\underbrace{\leq}_{b = b_0 + b - b_0} (|b_0| + |b - b_0|)|a - a_0| + |a_0||b - b_0| \\ &\leq (|b_0| + |a_0| + 1)(\underbrace{|a - a_0| + |b - b_0|}_{<\delta}) \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

für $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{|b_0|+|a_0|+1}\right\}$ und $d_1\left((a,b),(a_0,b_0)\right) < \delta$.

Satz 4.6. Seien

$$\begin{aligned}f &: (X, d) \to (Y, d') \\ g &: (Y, d') \to (Z, d'')\end{aligned}$$

mit f stetig in x_0 und g stetig in $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ stetig in x_0.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ dann $\exists \tilde{\delta} > 0 : d'(y, f(x_0)) < \tilde{\delta} \Rightarrow d''(g(y)), g(f(x_0)) < \varepsilon$ (da g stetig in $f(x_0)$). Da f stetig in x_0: $\exists \delta > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \tilde{\delta}$.
Also: $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \tilde{\delta} \Rightarrow d(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ ist $g \circ f$ stetig in x_0. □

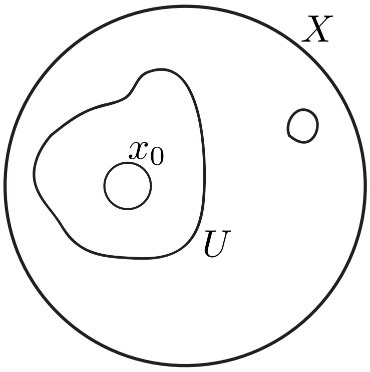
Folgerung aus dem Satz und den Beispielen:
Das Skalarprodukt:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \cdot y \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

25.11.2012 ist stetig.

4.1 Äquivalente Charakterisierung der Stetigkeit

Ausflug zu metrischen Räumen



Definition 4.7. Sei (X, d) metrischer Raum und $x_0 \in X$. Dann heißt eine $U \subset X$ Umgebung von x_0, falls $B_\delta(x_0) \subset U$ für ein $\delta > 0$.

Bemerkung 4.8. Ist U Umgebung von x_0 und $U \subset V$, so ist auch V Umgebung von x_0.

Bemerkung 4.9. X ist Umgebung von jedem $x_0 \in X$.

Beispiel 4.10. Jeder offene Ball $B_\delta(x_0)$ ist Umgebung von x_0 für $\delta > 0$.

Zur Erinnerung: Sei f stetig in x_0. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.

Satz 4.11. Sei $f : (X, d) \to (Y, d')$ und $x_0 \in X$. Dann sind äquivalent:

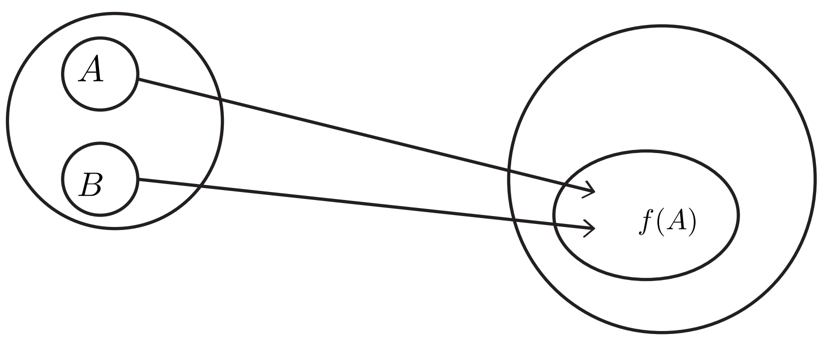
a) f ist stetig in x_0.

b) Für jede Umgebung V von $f(x_0)$ ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Sei V Umgebung von $f(x_0)$. D.h. es existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset V$. Da f stetig in x_0, existiert ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \subset V$.
Daraus folgt: $f^{-1}(f(B_\delta(x_0))) \subset f^{-1}(V)$

Bemerkung 4.12.

$$\boxed{A \subset f^{-1}f(A)}$$



Daraus folgt: $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(f(B_\delta(x_0))) \subset f^{-1}(V)$
Daraus folgt: $f^{-1}(V)$ ist Umgebung von x_0.

Bemerkung 4.13.

$$\boxed{f(f^{-1}(A)) \subset A}$$

b) $\Rightarrow$ *a)*: Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow B_\varepsilon(f(x_0))$ ist Umgebung von $f(x_0) \overset{b)}{\Rightarrow} f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))$ ist Umgebung von $x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ (siehe Bemerkung).
Es folgt daraus: $f(B_\delta(x_0)) \subset f(f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.
Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist f stetig in x_0. □

Zu Erinnerung: $x_n \to x$ in (X,d) genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, mit $\underbrace{d(x_n, x) < \varepsilon}_{x_n \in B_\varepsilon(x)}$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. D.h. für alle $\varepsilon > 0$ sind fast alle x_n in $B_\varepsilon(x)$.

Satz 4.14. Sei (x_n) Folge in (X,d) und $x \in X$. Dann gilt $x_n \to x$ genau dann, wenn jede Umgebung von x fast alle Folgeglieder enthält.

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei U Umgebung von x.
Daraus folgt: $B_\delta(x) \subset U$ für ein $\delta > 0$. Mit $x_n \to x$ folgt daraus: fast alle x_n sind in $B_\delta(x)$, also auch in U.
"$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon > 0$. Da $B_\varepsilon(x)$ Umgebung von x ist, gilt $x_n \in B_\varepsilon(x)$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ (fast alle).
Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt $x_n \to x$. □

Bemerkung 4.15. Sei $(x_n)_n$ Folge in (X,d). Dann ist $y \in X$ genau dann Häufungspunkt von $(x_n)_n$ (Grenzwert einer konvergenten Teilfolge), falls jede Umgebung von y unendlich viele x_n enthält.

Zurück zur Stetigkeit.

Definition 4.16 (Folgenstetig)**.** Sei $f : (X,d) \to (Y,d')$ und $x_0 \in X$. Dann heißt f *folgenstetig* in x_0, falls für jede Folge $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$

Satz 4.17. Sei $f : (X,d) \to (Y,d')$. Dann ist f stetig in x_0 genau dann, wenn f folgenstetig in x_0 ist.
Wir schreiben: $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$ bzw. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei f stetig in x_0 und $x_n \to x_0$. Zu zeigen: $f(x_n) \to f(x_0)$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Da $x_n \to x_0$, existiert ein n_ε mit $x_n \in B_\delta(x_0)$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.
Daraus folgt: $f(x_n) \subseteq f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$ für $n \geq n_\varepsilon$ (d.h. $d(f(x_n)), f(x_0)) < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$).
Da ε beliebig, folgt: $f(x_n) \to f(x_0)$.
"$\Leftarrow$:" Widerspruchsbeweis:
Angenommen f ist folgenstetig in x_0, aber nicht stetig in x_0.
$\neg(\forall \varepsilon \exists \delta) : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$

$\exists\varepsilon\neg(\exists\delta): f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$
$\exists\varepsilon\forall\delta: f(B_\delta(x_0)) \not\subset B_\varepsilon(f(x_0))$
Also existiert $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $\delta > 0$: $f(B_\delta(x_0)) \not\subset B_\varepsilon(f(x_0))$.
Insbesondere existiert eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0)$ und $f(x_n) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$.
Also $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ und $d(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon$.
Daraus folgt: $x_n \to x_0$ und $d(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon$
Da f folgenstetig, folgt: $f(x_n) \to f(x_0)$ und $d(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon$ ↯ □

stetig $\leftrightarrow$ folgenstetig $\leftrightarrow$ Urbilder von Umgebungen von $f(x_0)$ sind Umgebungen von x_0.

4.2 Globale Stetigkeit

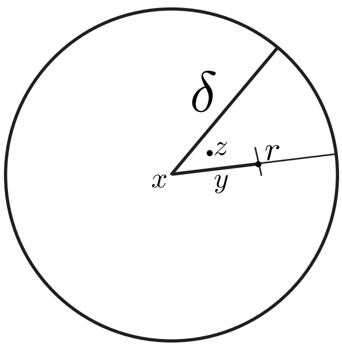
Zurück zu metrischen Räumen.

Definition 4.18. Sei (X, d) metrischer Raum und $U \subset X$. Dann heißt U *offen*, wenn zu jedem $x \in U$ ein $\delta = \delta(x) > 0$ existiert mit $B_\delta(x) \subset U$, d.h. U ist Umgebung aller seiner Elemente.

Beispiel 4.19. $\emptyset$ und X sind offen.

"offener Ball" $B_\delta(x) := \{y \in X : d(x, y) < \delta\}$.

Satz 4.20. Jeder "offener Ball" $B_\delta(x)$ ist offen.



Beweis. Sei $y \in B_\delta(x)$, d.h. $d(x, y) < \delta$. Daraus folgt: $\boxed{r := \delta - d(x, y)} > 0$.
Zu zeigen: $B_r(y) \subset B_\delta(x)$: Sei $z \in B_r(y)$. d.h. $d(y, z) < r$
Daraus folgt:
$d(z, x) \leq d(x, y) + \underbrace{d(y, z)}_{<r} < d(x, y) + r = \delta$
Daraus folgt $d(z, x) < \delta$, also $z \in B_\delta(x)$.
Es folgt die Behauptung. Also ist $B_\delta(x)$ offen. □

Definition 4.21. Sei (X, d) metrischer Raum. Dann heißt $A \subset X$ *abgeschlossen*, falls $X \backslash A$ offen.

Bemerkung 4.22. $B \subset X$ offen $\Leftrightarrow$ $X \backslash B$ abgeschlossen.
$B = X \backslash A$ Daraus folgt: $X \backslash B = A$

Beispiel 4.23. $\mathbb{R}^2 \backslash B_1((0,0))$ ist abgeschlossen.

Beispiel 4.24. $(a, b) = B_{\frac{b-a}{2}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ist offen.

Lemma 4.25. Sei (X, d) metrischer Raum, $x_0 \in X, r > 0$, dann ist
$U := \{y : d(y, x_0) > r\}$ offen.

Beweis. Sei $y \in U$, d.h. $d(y, x_0) > r$. Daraus folgt: $s := d(y, x_0) - r > 0$.
Behauptung: $B_s(y) \subset U$: Sei $z \in B_s(y)$ dann $d(y, z) < s$.
Daraus folgt: $d(z, x_0) \geq d(y, x_0) - \underbrace{d(y, z)}_{<s}$ (Dreiecksungleichung!) $> d(y, x_0) - s = r$.
also $d(z, x_0) > r$ d.h. $z \in U$
Daraus folgt: Zwischenbehauptung! Daraus folgt: U ist offen. □

Folgerungen:
a) Jeder "abgeschlossene Ball" $\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ ist abgeschlossen.
b) Jede Sphäre $S_r(x) := \{y \in X : d(x, y) = r\}$ ist abgeschlossen.

Beweis. a) $X \backslash \overline{B_r(x)} = \{y \in X : d(x, y) > r\}$ ist offen. $\Rightarrow a$
b) $\underbrace{S_r(x)}_{\text{“=“}} = \underbrace{\overline{B_r(x)}}_{\text{“}\leq\text{“}} \backslash \underbrace{B_r(x)}_{\text{“<“}} = \underbrace{\overline{B_r(x)}}_{\text{abg.}} \cap \underbrace{(X \backslash B_r(x))}_{\text{abg.}}$
□

28.11.2013

Definition 4.26. Sei $U \subset (X, d)$ und $x \in U$. Dann heißt x *innerer Punkt* von U, falls U Umgebung von x ist.

Satz 4.27. Seien $U_\lambda \subset (X, d)$ offen für $\lambda \in \Lambda$ (beliebig viele). Dann ist $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ offen.

Beweis. Sei $x \in \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Also existiert $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $x \in U_{\lambda_0}$. Da U_{λ_0} offen, ist U_{λ_0} Umgebung von x. Als Obermenge ist $\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ auch Umgebung von x. Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 4.28. Der unendliche Durchschnitt offener Mengen ist im Allgemeinen nicht offen. Z.B. ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ nicht offen.

Satz 4.29. Seien $U_1, \ldots, U_n \subset (X, d)$ offen. Dann ist $\bigcap_{i=1}^n U_i$ offen.

Beweis. Sei also $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. Daraus folgt: $x \in U_i$, für $i = 1, \ldots, n$ Daraus folgt: Da U_i offen existiert $\delta_i > 0$ mit $B_{\delta_i}(x) \subset U$ für jedes $i = 1, .., n$ Sei $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Daraus folgt: $B_\delta(x) \subset B_{\delta_i} \subset U_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Daraus folgt: $B_\delta(x) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$. Also ist x innerer Punkt von $\bigcap_{i=1}^n U_i$. Da $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ beliebig, muss $\bigcap_{i=1}^n U_i$ offen sein. □

Wir erinnern uns daran, dass das Komplement offener Mengen abgeschlossen ist und das Komplement abgeschlossener Mengen offen ist. Damit können wir mit den Rechenregeln aus Lemma 1.13 die Sätze 4.27 und 4.29 in die entsprechenden Aussagen über abgeschlossene Mengen umwandeln:

Lemma 4.30. Seien $A_\lambda, A_1, \ldots, A_n \in (X, d)$ abgeschlossen, $\lambda \in \Lambda$.
a) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ ist abgeschlossen
b) $\bigcup_{i=1}^n A_i$ ist abgeschlossen

Beweis. siehe: Tutorium □

Die Sphäre $S(x,r)$ ist abgeschlossen, da wir sie als Schnitt abgeschlossener Mengen schreiben können:

$$S(x,r) = \overline{B(x,r)} \backslash B(x,r) = \underbrace{\overline{B(x,r)}}_{\text{abgeschlossen}} \cap \underbrace{(\underbrace{B(x,r)}_{\text{offen}})^{\complement}}_{\text{abgeschlossen}}.$$

Bemerkung 4.31. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, dann sind äquivalent:

a) U ist offen bzgl. d_1

b) U ist offen bzgl. d_2

c) U ist offen bzgl. d_∞

Dies folgt aus $d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n\, d_\infty(x,y)$.

Zurück zur Stetigkeit:

Satz 4.32. Sei $f : (X,d) \to (Y,d')$. Dann sind äquivalent:

a) f ist stetig

b) Urbilder offener Mengen sind offen

c) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen

Beweis. *a) $\Rightarrow$ b)*: Sei $U \subset Y$ offen, $U := f^{-1}(V)$. Behauptung: U ist offen.

Es genügt zu zeigen (zz): Jedes $x \in U$ ist innerer Punkt, d.h. U ist Umgebung von jedem $x \in U$

Sei also $x \in U$. Daraus folgt: $f(x) \in U$ da $f^{-1}(V) = \{x : f(x) \in U\}$

Da V offen, ist V Umgebung von $f(x)$ Daraus folgt: $f^{-1}(V)$ ist Umgebung von x, da f stetig in x. $\Rightarrow$ b).

b) $\Rightarrow$ a): z.Z: f ist stetig in $x \in X$ (beliebig).

Sei $\varepsilon > 0$. Betrachte $B_\varepsilon(f(x))$. zu Zeigen: $\exists \delta > 0 : \; f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$

Da $B_\varepsilon(f(x))$ offen ist, ist $\underbrace{f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))}_{x\in}$ offen und damit ist x innerer Punkt von $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$.

Daraus folgt: $\varepsilon\delta > 0 : B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$.

Mit der Anwendung von f folgt: $f(B_\delta(x)) \subset f(f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))) \subset B_\varepsilon(f(x)) \Rightarrow a)$.

b) $\Leftrightarrow$ c): Nutze $\boxed{f^{-1}(A^{\complement}) = (f^{-1}(A))^{\complement}}$

b) $\Rightarrow$ c): z.Z: Ist A ist abgeschlossen, so ist $A^{\complement}$ offen und damit auch $f^{-1}(A^{\complement})$ offen. Wegen $f^{-1}(A^{\complement}) = (f^{-1}(A))^{\complement}$, ist $(f^{-1}(A))^{\complement}$ offen und $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

c) $\Rightarrow$ b): analog zu *b) $\Rightarrow$ c)*. □

Bemerkung 4.33. Achtung im Allgemeinen gilt nicht: f(abgeschlossen) ist offen bzw. f(offen) ist abgeschlossen.

Z.B. ist $A := (-1,1)$ offen, aber $f(A) = [0,1)$ für $f(x) = x^2$ ist nicht offen.

Bemerkung 4.34. (Tutorium/Übung).

a) Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_j$ $(x) = (x_1, \ldots, x_n)$

b) Sei (X, d) metrischer Raum, dann ist $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stetig (bzgl(X, d))

Definition 4.35. Für Mengen A und B definieren wir

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Analog definieren wir $A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) : a_j \in A_j \text{ für } j = 1, \ldots, n\}$. Außerdem sei $A^n = A \times \cdots \times A$ (n-faches Produkt).

Beispiel 4.36. Sei $Q := [0,1]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \in [0,1] \text{ für } j = 1, \ldots, n\}$. Dann ist Q abgeschlossen auf Grund der folgenden Argumentation: Sei $\Pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x_j$ die Projektion auf die j-te Komponente. Dann ist $[0,1]^n = \bigcap_{j=1}^n \Pi_j^{-1}([0,1])$. Da Π_j stetig und $[0,1]$ abgeschlossen, ist $\Pi_j^{-1}([0,1])$ abgeschlossen. Als endlicher Schnitt abgeschlossener Mengen ist $[0,1]^n$ also abgeschlossen.

Beispiel 4.37. Wir können nun nochmals beweisen, dass $B_r(x_0) = \{y \in X : d(y, x_0) < r\}$ offen ist: Betrachte $f : X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto d(y, x_0)$. Dann ist f als Verknüpfung der Abbildungen $y \mapsto (y, z_0)$ und d stetig. Da $B_r(x_0) = f^{-1}(-\infty, r)$ und $(-\infty, r)$ offen ist, muss $B_r(x_0)$ als Urbild offen sein.

Bemerkung 4.38. Die Mengen (a, b), $(-\infty, b)$ und (a, ∞) sind offen. Die Mengen $[a, b]$, $(-\infty, b]$ und $[a, \infty)$ sind abgeschlossen.

Bemerkung 4.39. In $\mathbb{R}$ sind nur $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ gleichzeitig offen und abgeschlossen!

Bemerkung 4.40. Sei $X = [0,1] \cup [2,3] \Rightarrow [0,1]$ offen und abgeschlossen in (X, d)

Satz 4.41 (Zwischenwertsatz)**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert für alle Zwischenwerte $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Beweis. Wir können annehmen, dass $f(a) \leq f(b)$ (sonst wende die Aussage für $-f$ an). Sei $A := \{\tilde{x} \in [a, b] : \text{Für alle } x_1 \in [a, \tilde{x}] \text{ gilt: } f(x_1) \leq y\}$. Sei $x_2 := \sup(A)$. Da $A \subset [a, b]$ und $a \in A$ gilt $x_2 \in [a, b]$. Da $x_2 = \sup(A)$, existiert eine Folge a_j in A mit $a_j \to x_2$. Nach Konstruktion von A gilt $f(a_j) \leq y$. Aus der Stetigkeit von f und $a_j \to x_2$ folgt daraus $f(x_2) \leq y$.

Fall $x_2 = b$: In diesem Fall folgt aus $f(x_2) = f(b), f(x_2) \leq y$ und $y \leq f(b)$, dass $f(x_2) = y = f(b)$. Damit ist die Aussage trivial. ✓

Fall $x_2 < b$: Nach Def. von A existiert eine Folge b_j mit $b_j \in [x_2, x_2 + \frac{1}{j})$ und $f(b_j) > y$ (sonst könnte man A größer wählen). Da $b_j \to x_2$ und $f(b_j) > y$, folgt mit der Stetigkeit von f, dass $f(x_2) \geq y$. Mit dem oben gezeigten $f(x_2) \leq y$, folgt also $f(x_2) = y$. □

02.12.2013

4.2.1 Abschluss von Mengen

Wie kommt man von $\underbrace{B_r(x)}_{\text{„ohne Rand“}}$ zu $\underbrace{\overline{B_r}(x)}_{\text{„mit Rand“}}$?

Definition 4.42. Sei $A \subset (X, d)$. Dann heißt $x \in X$ *Berührpunkt* von A, falls in jeder Umgebung von x auch (min.) ein Punkt aus A ist.

Bemerkung 4.43. Jedes $x \in A$ ist Berührpunkt von A.

Bemerkung 4.44. Sei $A \subset (X, d)$. Dann ist x Berührpunkt von A genau dann, wenn es eine Folge a_n aus A gibt mit $a_n \to x$.

Definition 4.45. Sei $A \subset (X, d)$. Dann sei $\overline{A} := \{x \in X : x \text{ ist Berührpunkt von } A\}$ Wir nennen $\overline{A}$ den *Abschluss* von A.

Beispiel 4.46. $\overline{B_r}(x) = \overline{B_r(x)}$. Beweis in der Übung.

Satz 4.47. Für $A \subset (X, d)$ gilt:
a) $A \subset \overline{A}$
b) $A = \overline{A} \Leftrightarrow A$ ist abgeschlossen

Beweis. Zu a): klar ✓.
Zu b): „$\Rightarrow$“ Wir haben $A = \overline{A}$ und müssen zeigen, dass $X \setminus A$ offen ist. Hierzu genügt es zu zeigen, dass jedes $x \in X \setminus A$ ein innerer Punkt von $X \setminus A$ ist.
Sei also $x \in X \setminus A$. Da $x \in X \setminus A = X \setminus \overline{A}$, gilt $x \notin A$ und somit ist x kein Berührpunkt von A. Also existiert eine Umgebung U von x mit $U \cap A = \emptyset$, d.h. $U \subset X \setminus A$. Folglich ist x ein innerer Punkt von $X \setminus A$.
„$\Leftarrow$“ Sei also A abgeschlossen. Dann ist $X \setminus A$ offen. Wir müssen zeigen, dass $A = \overline{A}$. Hierzu genügt es zu zeigen, dass $\overline{A} \subset A$ (denn $A \subset \overline{A}$ ist klar!). Alternative dazu werden wir zeigen, dass $X \setminus A \subset X \setminus \overline{A}$.
Sei also $x \in X \setminus A$. Da $X \setminus A$ offen, existiert eine Umgebung $B_\delta(x) \subset X \setminus A$ von x. Folglich ist x kein Berührpunkt von A. Daraus folgt: $x \in X \setminus \overline{A}$. Da $x \in X \setminus A$ beliebig, haben wir wie gewünscht gezeigt, dass $X \setminus A \subset X \setminus \overline{A}$. □

Satz 4.48. Sei $A \subset (X, d)$. Dann ist der Abschluss $\overline{A}$ abgeschlossen.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $X \setminus \overline{A}$ offen ist. Sei also $x \in X \setminus \overline{A}$. Dann ist $x \notin \overline{A}$ und folglich kann x kein Berührpunkt von A sein. Folglich existiert $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset X \setminus A$.
Wir werden nun zeigen, dass $B_\delta(x) \subset X \setminus \overline{A}$. Sei also $y \in \overline{A}$ beliebig. Dann existiert $a_n \in A$ mit $a_n \to y$. Daraus folgt: $d(a_n, y) \xrightarrow{n} 0$. Wegen $d(x, y) \geq d(x, a_n) - d(a_n, y)$, $d(x, a_n) \geq \delta$ und $d(a_n, y) \to 0$ folgt $d(x, y) \geq \delta$. Folglich gilt $y \notin B_\delta(x)$. Da $y \in \overline{A}$ beliebig, folgt $B_\delta(x) \subset X \setminus \overline{A}$.
Da $B_\delta(x) \subset X \setminus \overline{A}$ ist x ein innerer Punkt von $X \setminus A$. Da $x \in X \setminus \overline{A}$ beliebig folgt, wie gewünscht, dass $X \setminus \overline{A}$ offen ist. □

Lemma 4.49. Seien $A, B \subset (X, d)$. Dann gilt:
a) Aus $A \subset B$ folgt $\overline{A} \subset \overline{B}$
b) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$

Beweis. Zu a): Jeder Berührpunkt von A ist Berührpunkt von B.
Zu b): Da die Menge $\overline{A}$ abgeschlossen gilt, folgt nach Satz 4.47 b), dass $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ □

Lemma 4.50. Sei $A \subset (X, d)$. Dann sind äquivalent:
a) A ist abgeschlossen
b) Für jede Folge a_n aus A, die in X konvergiert, liegt der Grenzwert in A.

Beweis. „*a) ⇒ b)*“: Sei $a_n \in A, a_n \to a \in X$. Daraus folgt: a ist Berührpunkt von A. Daraus folgt: $a \in \overline{A}$ Daraus folgt: $a \in A$, da $A = \overline{A}$.
„*b) ⇒ a)*“: Sei $x \in \overline{A}$ beliebig. Daraus folgt: $\exists a_n \in A$ mit $a_n \to x$. Mit b) folgt daraus: $x \in A$. Also folgt: $\overline{A} \subset A \subset \overline{A}$ Daraus folgt: $\overline{A} = A$. Damit ist A ist abgeschlossen (siehe Satz 4.47). □

Satz 4.51. Sei $A \subset (X, d)$. Dann ist $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält. Genauer:

$$\overline{A} = \bigcap \{G : G \text{ abgeschlossen und } A \subset G\} := \bigcap_{\substack{G : G \text{ abg.,} \\ A \subset G}} G$$

Beweis. Sei $\tilde{A} := \bigcap \{G : G \text{ abgeschlossen}, A \subset G\}$. Sei nun G eine zulässige Menge, d.h. G ist abgeschlossen und $A \subset G$. Dann gilt $\overline{A} \subset \overline{G} = G$, da G abgeschlossen. Also ist jedes zulässige G eine Obermenge von $\overline{A}$. Hieraus folgt: $\overline{A} \subset \tilde{A}$.
Da $\overline{A}$ abgeschlossen, ist $\overline{A}$ selber einer zulässige Menge in der Definition von $\tilde{A}$. Daraus folgt: $\tilde{A} \subset \overline{A}$. Mit dem obigen $\overline{A} \subset \tilde{A}$, folgt also $\tilde{A} = \overline{A}$. □

Bemerkung 4.52. Aus der Formel folgt nochmals, dass $\overline{A}$ abgeschlossen ist. Denn der Schnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Lemma 4.53. Seien $A, B \subset (X, d)$ Dann gilt $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Beweis. Da $\overline{A} \cup \overline{B}$ eine abgeschlossene Obermenge von $A \cup B$ ist, folgt nach Satz 4.51, dass $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ (kleinste abgeschlossene Obermenge).
Aus $A \subset A \cup B$ folgt $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Analog haben wir $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Daraus folgt $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Mit obigem $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ folgt also $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$. □

Bemerkung 4.54. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ gilt:
- $\overline{(a, b)} = [a, b]$
- $\overline{(a, b]} = [a, b]$
- $\overline{[a, b)} = [a, b]$

Man nennt (a, b) „offenes Intervall“ und $[a, b]$ „abgeschlossenes Intervall“.

Bemerkung 4.55. Im Allgemeinen gilt **nicht** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Dies kann man leicht and den folgenden Beispielen sehen:

a) Sei $A := \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann gilt $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ und $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

b) Sei $A = (0,1)$ und $B = (1,2)$. Dann ist $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ und $\overline{A} \cap \overline{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$.

4.2.2 Das Innere einer Menge

Definition 4.56. Für $A \subset (X,d)$ sei $A^\circ := \mathring{A} := \{a \in A : a \text{ ist innerer Punkt von } A\}$

Lemma 4.57. Für $A \subset (X,d)$ gilt:

a) $A^\circ = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$

b) $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$

Beweis. In der Übung. □

Satz 4.58. Sei $A \subset (X,d)$. Dann ist A° die größte offene Teilmenge von A. Genauer $A^\circ = \bigcup\{V : V \subset A, V \text{ offen}\}$.

Beweis. Unter Benutzung von Lemma 4.57 und Satz 4.51 rechnen wir:

$$\begin{aligned}
A^\circ &= ((A^\circ)^\complement)^\complement = (\overline{A^\complement})^\complement \\
&= \left(\bigcap\{G : G \text{ abgeschlossen }, A^\complement \subset G\}\right)^\complement \\
&= \bigcup\{G^\complement : G \text{ abgeschlossen}, A^\complement \subset G\} \\
&= \bigcup\{V : V \text{ offen}, V \subset A\}.
\end{aligned}$$

□

Da die Vereinigung offener Mengen stets offen ist, folgt aus Satz 4.58:

Folgerung 4.59. Sie $A \subset (X,d)$. Dann ist A° ist offen.

05.12.2013

Folgerung 4.60. Für $A, B \subset (X,d)$ gilt:

a) $A \subset B$ Daraus folgt: $A^\circ \subset B^\circ$

b) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

c) $A = A^\circ \Leftrightarrow A$ ist offen

Beweis. a) $A^\circ \subset A \subset B$. Da B° die größte offene Teilmenge von B ist, folgt $A^\circ \subset B^\circ$.

b) Folgt aus c)

c) Falls A offen ist, dann ist A die größte offene Teilmenge von A.

□

Definition 4.61. Für $A \subset (X,d)$ definieren wir den *Rand* δA als $\delta A := \overline{A} \setminus A^\circ$

Bemerkung 4.62. $\delta A = \overline{A} \setminus (A^\circ) = \overline{A} \cap ((A^\circ)^\complement) = \overline{A} \cap \overline{(A^\complement)}$

Beispiel 4.63. $A = B_r(x)$. Daraus folgt: $\delta A = \overline{B_r(x)} \setminus B_r(x) = S_r(x)$

Bemerkung 4.64. Zu $x \in \delta A$ gibt es in jeder Umgebung von x Punkte aus A und $A^\complement$

4.3 Kompakte Mengen

Wir hatten „Bolzano-Weierstrass “: Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Definition 4.65. Sei $K \subset (X, d)$. Dann heißt K *Folgenkompakt*, wenn jede Folge a_n aus K eine konvergente Teilfolge hat, deren Grenzwert in K liegt.

Satz 4.66. (Heine-Borel) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent
a) K ist folgenkompakt
b) K ist abgeschlossen und beschränkt

Beweis. *b)* $\Rightarrow$ *a)*: Sei a_n Folge aus K. Da K beschränkt, ist auch die Folge a_n beschränkt. Nach Bolzanzo Weierstrass, existiert eine konvergente Teilfolge. $a_{n_k} \xrightarrow{k} a \in X$.
Da K abgeschlossen, aus $a_{n_k} \in K$ und $a_{n_k} \to a$ folgt $a \in K$. Da $(a_n)_n$ beliebig, ist K folgenkompakt.
a) $\Rightarrow$ *b)* Sei also K kompakt.
zu abgeschlossen: Widerspruchsbeweis. Angekommen K ist nicht abgeschlossen.
$\exists (a_n)_n : a_n \in K, a_n \to a \in X \setminus K$. Da K folgenkompakt, existiert eine Teilfolge $a_{n_k} \to \tilde{a} \in K$. Alle Teilfolgen einer konvergenten Folge haben den gleichen Grenzwert!
Daraus folgt: $a = \tilde{a}$. Also $a \in X \setminus K$ und $a = \tilde{a} \in K \quad (\lightning)$.
zu beschränkt: Wiederspruchsbeweis: Angenommen K ist unbeschränkt. Daraus folgt: Es existiert eine Folge $a_n \in K$, mit $|a_n| \nearrow \infty$. Daraus folgt: Jede Teilfolge ist unbeschränkt. Da K folgenkompakt, muss eine konvergente und beschränkte Teilfolge $(a_{n_k})_k$ geben. $(\lightning)$
□

Beispiel 4.67. $[a, b], [0, 1]^n, \overline{B_r(x)}$ sind alle folgenkompakt in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$.

Lemma 4.68. Sei $K \subset (X, d)$ folgenkompakt. Dann ist K abgeschlossen und beschränkt.

Beweis. Siehe oben „a) $\Rightarrow$ b) “ □

Satz 4.69. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ folgenkompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ ist stetig. Dann nimmt f aus K sein Maximum an, d.h. es existiert $x_0 \in K$ mit $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in K\} = \sup f(K)$.

Beweis. Später! □

(Überdeckuns-)kompaktheit:

Definition 4.70. Sei $K \subset (X,d)$. Ein Mengensystem $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ heißt *Überdeckung* von K, falls $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$.
Eine Überdeckung heißt *offen*, falls alle U_λ offen sind.

Definition 4.71. Sei $K \subset (X,d)$. Dann heißt K *kompakt*, falls jede offene Überdeckung $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ von K eine endliche Teilüberdeckung hat, d.h. es existiert $m \in \mathbb{N}, \lambda_1, ..., \lambda_m \in \Lambda$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^m U_{\lambda_j}$.

Beispiel 4.72. Sei $a_n \to a$ in (X,d). Sei $K := \{a_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$. Dann ist K kompakt.

Beweis. Sei also $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ offene Überdeckung.
Daraus folgt: Es existiert λ_0 mit $a \in U_{\lambda_0}$. Da $a_n \to a$ und U_{λ_0} Umgebung von a (da offen), existiert $n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in U_{\lambda_0}$ für $n \geq n_0$.

$$\text{Daraus folgt: } K \subset \underbrace{U_{\lambda_0} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0-1} U_{\lambda_j}}_{\text{endliche Teilüberdeckung}} \quad \text{mit } U_{\lambda_j} \text{ so, dass } a_j \in U_{\lambda_j}.$$ □

Bemerkung 4.73. Achtung: $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist im Allgemeinen nicht kompakt für $a_n \to a$, da der Grenzwert a fehlt.

Satz 4.74. Sei $K \subset (X,d)$ kompakt. Dann ist K folgenkompakt.

Beweis. Wiederspruchsbeweis. Angenommen K ist nicht folgenkompakt. Daraus folgt: Es existiert eine folge $a_n \in K$, die keine in K konvergente Teilfolge hat. Daraus folgt: Kein $x \in X$ ist Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Daraus folgt: Für $x \in K$ existiert eine Umgebung $B_{\delta_x}(x)$, so dass $B_{\delta_x}(x)$ nur endlich viele a_n enthält. Da $K \subset \bigcup_{x\in K} B_{\delta_x}(x)$ offene Überdeckung und K kompakt, gilt $K \subset \bigcup_{j=1}^m B_{\delta_j}(x_j)$ für geeignetes $m \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_m \in K, \delta_j := \delta_{x_j}$
Daraus folgt: K enthält nur endlich viele Folgenglieder (nach Konstruktion der $B_\delta(x_j)$).
Aber alle $a_n \in K$ $(\lightning)$. □

Lemma 4.75. Sei $K \subset (X,d)$ folgenkompakt. Dann ist K *total beschränkt*, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ lässt sich K durch endlich viele $B_\varepsilon(x_j), j = 1, ..., m$ mit $x_1, ..., x_m \in K$ überdecken.

Beweis. Widerspruchsbeweis: Angenommen K ist nicht total beschränkt. D.h. es existiert $\varepsilon_0 > 0$, so dass man K nicht durch endlich viele ε_0-Kugeln mit Zentren aus K überdecken kann. Wir konstruieren induktiv Folge $x_j \in K$ mit $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon_0$ für alle $j \neq k$.

a) Wähle $x_1 \in K$ ✓

b) Wähle $x_{n+1} \in K \backslash (B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup ... \cup B_{\varepsilon_0}(x_n))$. Daraus folgt $d(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon$ für $j = 1, ..., n$.

Da K folgenkompakt, muss Teilfolge von x_j konvergieren und das Cauchykriterium erfüllen. Dies widerspricht $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon_0$ für $j \neq k$. $(\lightning)$ □

Satz 4.76. Sei $K \subset (X,d)$ folgenkompakt, dann ist K kompakt.

Beweis. Widerspruchsbeweis: Angenommen K ist nicht kompakt. Dann existiert offene Überdeckung $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ von K, so dass es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Da K folgenkompakt, ist K total beschränkt. Also lässt sich K durch endlich viele Bälle mit Radius $\frac{1}{k}$ überdecken. Daraus folgt: Es existiert ein Ball B_k dieser Überdeckung (mit Radius $\frac{1}{k}$), der sich nicht durch endlich viele der $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ überdecken lässt. (Sonst hätte man endliche Überdeckung von K.)
Sei $B_k = B_{\frac{1}{k}}(x_k)$ (x_k ist Zentrum von B_k).
Da K folgenkompakt, $x_k \in K$, gibt es Teilfolge $x_{n_k} \xrightarrow{k} \overline{x} \in K$. Wähle λ_0 so, dass $\overline{x} \in U_{\lambda_0}$.
Da U_{λ_0} offen, existiert $\varepsilon_0 > 0$. mit $B_{\varepsilon_0}(\overline{x}) \subset U_\lambda$.
Da $x_{n_k} \to \overline{x}$, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_N, \overline{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $N > \frac{2}{\varepsilon}$.
Behauptung: $B_N = B_{\frac{1}{N}}(x_N) \subset B_{\varepsilon_0}(\overline{x}) \subset U_{\lambda_0}$. Sei also $y \in B_{\frac{1}{N}}(x_N)$
Daraus folgt: $d(y,\overline{x}) \le \underbrace{\underbrace{d(y,x_N)}_{<\frac{1}{N}}}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_N,\overline{x})}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$.
Da y beliebig folgt: $B_N = B_{\frac{1}{N}}(x_N) \subset B_\varepsilon(\overline{x}) \subset U_{\lambda_0}$
Daraus folgt: B_N lässt sich ein U_{λ_0} überdecken. $\lightning$ (zur Konstruktion von B_N). $\square$

09.12.2013

Folgerung 4.77. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent.

a) K ist kompakt
b) K ist folgenkompakt
c) K ist abgeschlossen und beschränkt

Satz 4.78. Sei $f : (X,d) \to (Y,d')$ stetig. Sei $K \subset X$ kompakt. Dann ist $f(K)$ kompakt.

Beweis. via folgenkompakt: Sei also y_n Folge in $f(K)$. Daraus folgt: $\exists x_n \in K : f(x_n) = y_n$. Da K folgenkompakt, existiert eine Teilfolge $x_{n_k} \xrightarrow{k} \overline{x} \in K$. Da f stetig folgt $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \xrightarrow{k} f(\overline{x}) \in f(K)$. Da $(y_n)_n$ beliebige Folge in $f(K)$, ist $f(K)$ folgenkompakt.
Via kompakt: Sei $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ offene Überdeckung von $f(K)$.
Also $f(K) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$
$\overset{f^{-1}}{\Rightarrow} K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \underbrace{f^{-1}(U_\lambda)}_{\text{offen, da } f \text{ stetig und } U_\lambda \text{ offen!}}$.
Da K kompakt, existiert endliche Teilüberdeckung, d.h. $K \subset \bigcup_{j=1}^m f^{-1}(U_{\lambda_j})$ mit geeigneten $m, \lambda_1, ..., \lambda_m$.
Daraus folgt: $f(K) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^m f^{-1}(U_{\lambda_j})\right) = \bigcup_{j=1}^m f(f^{-1}(U_{\lambda_i})) \subset \bigcup_{j=1}^m U_{\lambda_j}$
Also hat $f(K)$ endliche Teilüberdeckung. Daraus folgt: $f(K)$ ist kompakt. $\square$

Definition 4.79. "Kompaktum" = "kompakte Menge".

Lemma 4.80. Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann gilt $\inf(K), \sup(K) \in K$.

Beweis. Wähle $x_n \in K$ mit $x_n \to \sup K$. Da K kompakt, ist K abgeschlossen. Mit $x_n \to \sup(K)$ folgt: $\sup(K) \in K$. □

Satz 4.81. Sei $K \subset (X,d)$ kompakt und $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $a,b \in K$ mit $f(a) = \inf f(K)$ und $f(b) = \sup(f(K))$. D.h. stetige Funktionen nehmen auf Kompaktum ihr Maximum oder Minimum an.

Beweis. Da f stetig und K kompakt, ist $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt. Also existiert $y,z \in f(K)$ mit $y = \inf(f(K)), z = \sup(f(K))$. (nach vorherigem Lemma). Daraus folgt: $\exists a,b \in K$ mit $f(a) = y = \inf(f(K)$ und $f(b) = z = \sup(f(K))$. □

Definition 4.82. Eine Abbildung $f : (X,d) \to (X,d')$ heißt *gleichmäßig stetig* auf $A \subset X$, falls: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : (\forall x,y \in A : \underbrace{d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(y)) < \varepsilon}_{\text{bzw. } f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))})$

Bemerkung 4.83. Im Gegensatz zu “stetig in x“ ist δ unabhängig von x

Beispiel 4.84. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Satz 4.85. Sei $K \subset (X,d)$ kompakt und sei $f(X,d) \to (Y,d')$ stetig in jedem $x \in K$. Dann ist f gleichmäßig stetig auf K.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig auf K, existiert zu jedem $x \in K$ ein $\delta(x) > 0$ so, dass aus $d(y,x) < \delta(x)$ folgt $d'(f(y),f(x)) < \varepsilon$. Nun ist $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}$.

Daraus folgt: $\exists$ eine endliche Teilüberdckung: $K \subset \bigcup_{j=1}^m B_{\frac{\delta(x_j)}{2}}(x_j)$ mit geeigneten $m \in \mathbb{N}$, $x_1,...,x_m \in K$. Wähle $\delta := \min\{\frac{1}{2}\delta(x_j) : j = 1,...,m\}$. Seien nun $x,y \in K$ mit $d(x,y) < \delta$. Daraus folgt: $\exists j_0 \in \{1,...,m\}$ mit $x \in B_{\frac{\delta(x_{j0})}{2}}(x_{j_0})$. Ohne Einschränkung $j_0 = 1$. Dann $d(x_1,y) \leq \underbrace{d(x,x_1)}_{<\frac{\delta_1}{2}} + \underbrace{d(x,y)}_{<\delta \leq \frac{\delta_1}{2}} < \delta_1$.

Wobei $\delta_1 := \delta(x_1)$. Also gilt nach Definition von δ_1: $d'(f(x),f(x_1)) < \varepsilon$ und $d'(f(y),f(x_1)) < \varepsilon$. Daraus folgt: $d'(f(x),f(y)) < 2\varepsilon$.
Wir haben $\delta > 0$ gefunden so, dass aus $d(x,y) < \delta$ folgt $d(f(x),f(y)) < 2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig, ist f gleichmäßig stetig auf K. □

Beispiel 4.86.
a) $x \mapsto x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig auf $[a,b]$ aber nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$
b) $(X,d) \to (X,d)$, $x \mapsto x$ ist gleichmäßig stetig .

Zusammenfassung für stetige Funktionen

Satz 4.87. Seien $f,g : (X,d) \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann gilt:
a) $f + g$ ist stetig in x_0

b) $f \cdot g$ ist stetig in x_0
c) $\frac{f}{g}$ ist stetig in x_0, falls $g(x_0) \neq 0$.

Beweis. z.B. via Folgen! (z.B. $x_n \to x$) Daraus folgt: $f(x_n) \to f(x), g(x_n) \to g(x)$
Daraus folgt $f(x_n) \cdot g(x_n) \to f(x)g(x)$.

Bzw, via: $x \mapsto (f(x), g(x))$ ist stetig. (Konvergenz im $\mathbb{R}^2$. Ist äquivalent zu: komponentenweise Konvergenz.

$$\begin{aligned} x \mapsto (f(x), g(x)) \quad &\overset{+}{\mapsto} f(x) + g(x) \\ &\mapsto f(x)g(x) \\ &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

$\square$

5 Komplexe Zahlen

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$ D.h. $x^2 + 1 = 0$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar. Ziel ist es $\mathbb{R}$ so zu erweitern, dass $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung hat.
Ziel: Finde Oberkörper $\mathbb{C}$ von $\mathbb{R}$, welcher ein $i \in \mathbb{C}$ enthält mit $i^2 = -1$.
Oberkörper heißt: $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ sind Körper, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ und $+_{\mathbb{R}} = +_{\mathbb{C}} |_{\mathbb{R}}$
zB: $\mathbb{R}$ ist Oberkörper von $\mathbb{Q}$.

Es gilt: $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, da $i^2 = -1$
Wir können $\mathbb{C}$ mittels Zahlenpaaren $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ konstruieren, wobei $a + ib$ dem Paar (a, b) entspricht.

Bemerkung 5.1. Die Darstellung $a + ib$ ist eindeutig. Denn aus $a + ib = x + iy$ mit $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ folgt zB: für $b \neq y$: $i = \frac{a-x}{y-b} \in \mathbb{R} \quad (\lightning)$
Motivation Addition: $(a + ib) + (x + iy) \stackrel{!}{=} (a + x) + (b + y)i$
Motivation Multiplikation: $(a+ib)\cdot(x+iy) = ax+ibx+aiy+\underbrace{i^2}_{=-1}by = (ax-by)+i(ay+bx)$

Motivation Division: $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}}_{\text{OK für } a^2+b^2 \neq 0 \Leftrightarrow (a,b) \neq (0,0)}$

Probe zeigt: $(a + ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = 1$ für $(a, b) \neq (0, 0)$.

5.1 Formale Definition von $\mathbb{C}$

Definiere auf $\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
(a, b) + (x, y) &= (a + x, b + y) \\
(a, b) \cdot (x, y) &= (ax - by, ay + bx) \\
i &:= (0, 1) \quad (\Rightarrow i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \\
\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \text{ via } x &\mapsto (x, 0)
\end{aligned}
$$

Dann ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Oberkörper von $\mathbb{R}$ mit $i^2 = -1$.

Definition 5.2. Sei $(a, b) = a + ib =: z \in \mathbb{C}$
dann heißt a Realteil, $a = Re(z)$ und b Imaginärteil, $b = Im(z)$.

12.12.2013

$\mathbb{C}$ = komplexe Zahlen $= \mathbb{R} + i\mathbb{R}$. Mit $i = \sqrt{-1}$.
$(\mathbb{C}, +, \cdot) \cong (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, $(a + ib) \cong (a, b), a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(a, b) + (x, y) &= (a + x, b + y)\\ (a, b)(x, y) &= (ax - by, ay + bx)\\ i := (0, 1) \Rightarrow i^2 &= (-1, 0)\end{aligned}$$

Körperisomorphismus aufs Bild:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2\\ x &\mapsto (x, 0)\\ Bild(\varphi) &= \mathbb{R} \times \{0\}\end{aligned}$$

a) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
b) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x)\varphi(y)$

Beweis. z.B. für a)
$\varphi(xy) = (xy, 0)$ und $\varphi(x)\varphi(y) = (x, 0)(y, 0) = (xy, 0x + 0y) = (xy, 0)$. □

Jedes Element $z \in \mathbb{C}$ hat eindeutige Darstellung $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
$\Re(z) := a, \Im(z) := b$

Definition 5.3. Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann seien $\overline{z} := a - ib$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = ||(a, b)||_2 = \sqrt{z\overline{z}}$ da $z\overline{z} = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$.
$|\cdot|$ heißt komplexer Betrag. $\overline{z}$ heißt komplex Konjugiertes.

Lemma 5.4. Es gelten folgende Eigenschaften
a) $\overline{\overline{z}} = z$
b) $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$
c) $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
d) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
e) $\overline{z}\,\overline{w} = \overline{zw}$
f) $z\overline{z} = |z|^2 = (\Re(z))^2 + (\Im(z))^2$
g) $|z \cdot w| = |z||w|$ (da $|zw|^2 = zw\overline{(zw)} = (z\overline{z})(w\overline{w}) = |z|^2|w|^2$)
h) $\mathbb{C}$ ist ein Körper
i) $|x|_{\mathbb{R}} = |x|_{\mathbb{C}}$ für $x \in \mathbb{R}$
j) $|\Re(z)| \leq |z|, |\Im(z)| \leq |z|$
k) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
l) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)
m) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$

5.2 Konvergenz / Topologie auf $\mathbb{C}$

$(\mathbb{C}, |\cdot|) \cong (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$
Damit lassen sich alle Konvergenzbegriffe von $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||)$ auf $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ übertragen.
Metrik auf $\mathbb{C} : d(z, w) := |z - w|$

Beispiel 5.5. $(z_n \to 0) \Leftrightarrow (|z_n| \to 0) \Leftrightarrow (\Re(z_n) \xrightarrow{n} 0$ und $\Im(z_n) \xrightarrow{n} 0)$.

Beispiel 5.6. Cauchyfolge: $(z_n)_n \in \mathbb{C}$ so, dass $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n, m \geq N_\varepsilon : |z_n - z_m| < \varepsilon$.

Bemerkung 5.7. $\mathbb{C}$ (immer mit $|\cdot|$ versehen) ist vollständig, denn $(\mathbb{R}^2,\ ||\cdot||_2)$ ist vollständig.

Bemerkung 5.8. Achtung: $\mathbb{R}$ ist geordneter Körper aber $\mathbb{C}$ ist kein geordneter Körper (Sonst $z^2 \geq 0$)
Wir können nur reelle Zahlen vergleichen! Also heißt "$\varepsilon > 0$" dass $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$
Daraus folgt: Auf $\mathbb{C}$ gibt es also kein $\sup, \inf, \limsup, \liminf$

5.3 Komplexe Reihen

Die meisten Aussagen über Reihen reellen Zahlen übertragen sich auf Reihen mit komplexen Zahlen:

$$\text{Für } a_n \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

Absolut konvergente Reihen in $\mathbb{C}$ kann man umordnen.
Für konvergente Reihen gilt:

$$\Re\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Re(a_n)$$
$$\Im\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Im(a_n)$$

Cauchyprodukt für absolut konvergente Reihen:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\right)$$

Absolut Konvergent impliziert Konvergenz.

Bemerkung 5.9. $\Re|(z)|, |\Im(z)| \leq |z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$

Achtung: Keine monotone Konvergenz für komplexe Reihen.

Beispiel 5.10. Majorantenkriterium: Sei $|a_n| \leq |b_n|$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$. Daraus folgt: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.
($\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ abs konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent)

Quotienenkriterium: Sei $\Theta \in (0,1)$ und $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \Theta$ für fast alle a_n. Dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut. (d.h $\sum_{n=0}^{\infty} |a_k| < \infty$).

Wurzelkriterium: $\underbrace{\text{Sei } \Theta \in [0,1) \text{ und } \sqrt[n]{|a_n|} \leq \Theta \text{ für fast alle } n}_{\text{bzw. } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}<1}$. Daraus folgt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

5.4 komplexe Exponentialfunktion

Wir definieren:

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ (mit } z^0 = 1, 0! = 1) \end{aligned}$$

Wohldefiniert nach Quotientenkriterium:
$\lim_{n\to 0} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{\cancel{n}+1}}{n+1} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{|z|^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$
Daraus folgt: fast alle $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{1}{2}$

Lemma 5.11. $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$

Beweis. Cauchyprodukt ✓ (Beweis wie in $\mathbb{R}$). □

Bemerkung 5.12. $\overline{(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n}$, folgt aus der Stetigkeit von

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \overline{z} \end{aligned}$$

Daraus folgt zum Beispiel: $\overline{\exp(z)} = \overline{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \exp \overline{z}$

Lemma 5.13. (Restgliedabschätzung für exp)
Es gilt: $\left|\exp(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{n^n}{n!}\right| \leq \frac{2|z|^{N+1}}{(N+1)!}$ für alle z mit $|z| \leq \frac{N+2}{2}$.

Beweis. 1. Teil

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}.$$

2. Teil:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!} = \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}\left(\underbrace{1+\underbrace{\frac{|z|}{N+2}}_{\leq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{|z|^2}{(N+1)(N+3)}}_{\leq\left(\frac{|z|}{|N+2|}\right)^2}+\underbrace{\frac{|z|^3}{(N+2)(N+3)(N+4)}}_{\leq\left(\frac{|z|}{(N+2)}\right)^3}+\ldots}_{\left(\text{wegen }\frac{|z|}{(N+2)}\leq\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$\leq \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2|z|^{N+1}}{(N+1)!}$$

□

$$\text{Es folgt: } e = \exp(1) = \begin{cases} 1 \pm 2 \text{ Fehler} & N=0 \\ 1+1\pm 1 = 2\pm 1 & N=1 \\ 1+1+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{3} = 2,5\pm 0,\overline{32} & N=2 \\ 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = 2,6\overline{6}\pm\frac{1}{12} & \end{cases}$$

Folgerung 5.14. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig (auch: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig)

Beweis. Sei $z_n \to z$ in $\mathbb{C}$. $\exp(z_n) - \exp(z) = \exp(z)(\exp(z_n - z) - 1)$
da $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$
Ziel: $\exp(z_n) - \exp(z) \to 0$
es genügt zu Zeigen: $\exp(z_n - z) - 1 \to 0$ (dies ist genau "exp ist stetig in 0")
Nach obigem Lemma für $N = 0$ gilt: $(\exp(z_n - z) - 1) \leq \underbrace{2\frac{|z_n - z|}{1!}}_{\xrightarrow{n} 0}$ falls $|z_n - z| \leq 1$

Daraus folgt: $|\exp(z_n - z) - 1| \to 0$
Daraus folgt: $\exp(z_n - z) - 1 \to 0$
Daraus folgt die Behauptung! □

16.12.2013

Bemerkung 5.15.

$$\exp(z) \neq 0 \text{ für alle } z \in \mathbb{C}$$

denn $\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1$ also $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$

Lemma 5.16.

$$|\exp(ix)| = 1 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |\exp(ix)|^2 &= \exp(ix)\overline{\exp(ix)} \\ &= \exp(ix)\exp(\underbrace{\overline{ix}}_{=-ix}) \text{ da } x \in \mathbb{R} \\ &= \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1 \end{aligned}$$

□

6 Trigonometrische Funktionen

Es folgt eine analytische Definition von $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

Definition 6.1. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\cos(x) := \Re(\exp(ix)) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}$$
$$\sin(x) := \Im(\exp(ix)) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

Dann gilt:

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Bemerkung 6.2. a) $\underbrace{(\cos(x))^2 + (sin(x))^2}_{|\exp(ix)|^2} = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

b) $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$, da $\exp(i0) = 1$

Folgerung 6.3. a) $\cos(-x) = \cos(x)$

b) $\sin(-x) = -\sin(x)$

c) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Beweis.

$$\cos(-x) + i\sin(-x) = \exp(i(-x)) = \overline{\exp(ix)} = \overline{\cos(x) + i\sin(x)} = \cos(x) - i\sin(x)$$

Vergleiche Real- und Imaginärteile □

6.1 Additionstheoreme

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x + y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$

Beweis. Folgt aus

$$\exp(i(x + y)) = \exp(ix)\exp(iy) = (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y))$$

(Vergleiche Real-/Imaginärteil) □

Folgerung 6.4. a) $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

b) $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Beweis. Nutze $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$, $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$. □

6.2 Reihenentwicklung von $\cos$ und $\sin$

$$\boxed{\cos(x) + i\sin(x) = \exp(ix)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} + i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

Nutze

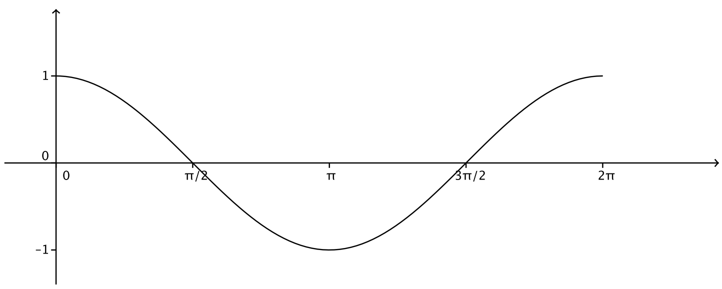
$$i^n = \begin{cases} 1 & n = 4k \\ i & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+2 \\ -i & n = 4k+3 \end{cases}$$

Also

$$\cos(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \pm \cdots$$
$$\sin(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \cdots$$

6.3 Konstruktion von π

Aus der Schule:



Lemma 6.5. cos hat auf $[0, 2]$ genau eine Nullstelle x_0. Wir definieren $\frac{\pi}{2} := x_0, (\pi := 2x_0)$

Beweis. a) $\cos(0) = 1$

b) $\cos(2) <= 0$

c) cos ist strikt fallend auf $[0, 2]$

Dann existiert nach Zwischenwertsatz genau eine Nullstelle in $[0, 2]$

zu a) $\cos(0) = \Re(\exp(i0)) = 1$ ✓

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \underbrace{- \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \pm}_{\text{alternierende Reihe (mit Nullfolge)}} \cdots \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

Daraus folgt:

$$\cos(2) \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!} = 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0 \ \Rightarrow b)$$

Für $0 \leq x \leq x' \leq 2$ gilt:

$$\cos x' - \cos x = -2 \sin\left(\frac{x' + x}{2}\right) \sin\left(\frac{x' - x}{2}\right) \stackrel{!}{<} 0 \quad \text{(Neues Ziel!)}$$

Zeige nun $\sin(x) > 0$ für $x \in (0, 2]$

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \underbrace{\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots}_{\geq 0 \text{ wie oben (alternierende Reihe)}} \\ &\geq x - \frac{x^3}{3!} = x(1 - \frac{x^2}{6}) = x\frac{1}{6}(\sqrt{6} - x)(\sqrt{6} + x)\end{aligned}$$

Daraus folgt: $\sin(x) > 0$ auf $(0, 2]$

Daraus folgt:

$$\cos(x') - \cos(x) = -2 \underbrace{\sin\left(\underbrace{\frac{x + x'}{2}}_{\in(0,2]}\right)}_{>0} \underbrace{\sin\left(\underbrace{\frac{x' - x}{2}}_{\in(0,1)}\right)}_{>0}$$

Daraus folgt: $\cos(x)$ ist strikt fallend auf $[0, 2]$. Daraus folgt: d) $\square$

Bemerkung 6.6. $\pi = 3,141592... \notin \mathbb{Q}$

Folgerung 6.7. a) $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$

b) $\exp(i\pi) = -1$

c) $\exp(\frac{i3\pi}{2}) = -i$

d) $\exp(i2\pi) = 1$

Beweis. Formel $\Rightarrow$ a), Rest durch Potenzierung $\square$

Bemerkung 6.8.

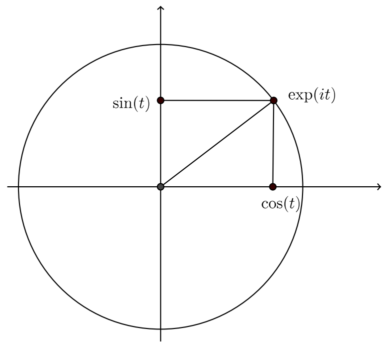
$$\boxed{\exp(i\pi) + 1 = e^{i\pi} + 1 = 0} \quad \text{Alle “wichtigen“ Konstanten}$$

Folgerung 6.9. a) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

b) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

c) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

Beweis. $\cos(x+2\pi) + i\sin(x+2\pi) = \exp(ix + i2\pi) = \exp(ix)\underbrace{\cancel{\exp(i2\pi)}}_{=1} = \cos(x) + i\sin(x)$. Rest analog. □



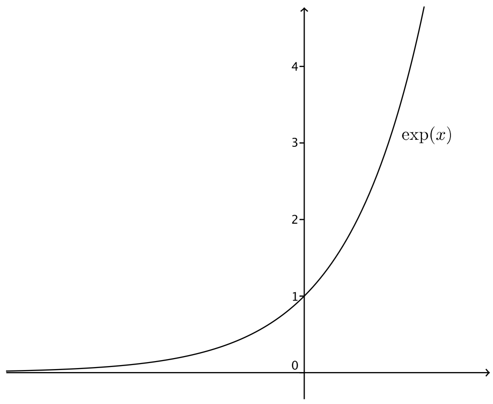
6.4 Exponentialfunktion im Reellen

Satz 6.10. i) $0 < \exp(x) < 1$ für $x < 0$
$\exp(0) = 1$
$\exp(x) > 1$ für $x > 0$

ii) $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist stetig und strikt wachsend

iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (exponentielles Wachsum)

iv) $\lim_{x\to-\infty} |x|^n \exp(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$



Beweis. i) Für $x > 0$: $\exp(x) = 1 + x + \underbrace{\cdots}_{\geq 0} > 1$

Für $x = 0$✓ Für $x < 0 : \exp(x) = \frac{1}{\underbrace{\exp(-x)}_{>1}} \in [0, 1)$

ii) Sei $x < x'$ Daraus folgt: $1 < \exp(\underbrace{x' - x}_{>0}) = \exp(x')\exp(-x)$

Mit $\exp(x)$ mit folgt: $\exp(x) < \exp(x')$

iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} \geq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{\cancel{n}+1}}{(n+1)!\cancel{x^n}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{(n+1)!} = \infty$, da $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

iv) $\frac{1}{\frac{\exp(x)}{x^n}} = \exp(-x)x^n$ also $\lim\limits_{x\to-\infty} |x^n|\exp(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^n \exp(-x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{\exp(x)}{x^n}}_{\overset{x}{\to}\infty}} = 0$

□

09.01.2014

Satz 6.11. Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig und strikt wachsend. Dann bildet f bijektiv auf $f(D)$ ab. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$ ist stetig + strikt wachsend.

Beweis. Übung. □

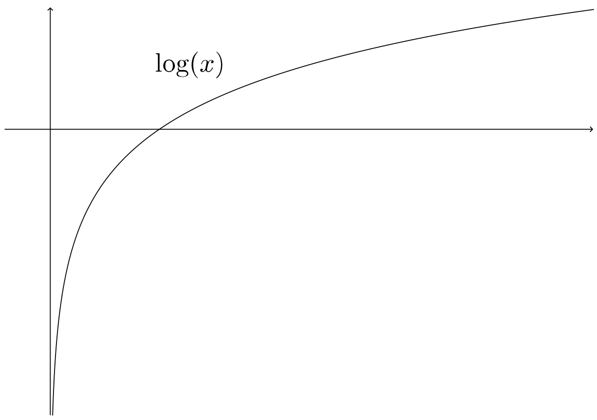
Anwendung: $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ stetig + strikt wachsend + bijektiv.

Aus dem Satz folgt: Es existiert eine Umkehrfunktion $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Die Funktion log ist stetig + strikt wachsend.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \exp_{\mathbb{R}} \circ \log &= \mathrm{id}_{(0,\infty)} \\ \log \circ \exp_{\mathbb{R}} &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Satz 6.12. Für $y \in (0, \infty)$ gilt:

- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$
- $\log 1 = 0$



Beweis. $\exp(\log(x) + \log(y)) = \underbrace{\exp(\log(x))}_{=x} \cdot \underbrace{\exp(\log(y))}_{=y} = xy = \exp(log(xy))$

$\overset{\log}{\Rightarrow} \log(x) + \log(y) = \log(xy)$.
Analog: $\log(x) - \log(y) = \log\left(\frac{x}{y}\right)$
$\exp(0) = 1 \overset{\log}{\Rightarrow} 0 = \log(1)$ □

Ziel:

$$e^r = \exp(r) \text{ für } r \in \mathbb{R}$$

Für $a > 0$ ist

$$a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} a^0 &:= 1 \\ a^{-1} &:= \frac{1}{a} \\ a^{-n} &= \frac{1}{a} \cdots \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Daraus folgt: a^n für $n \in \mathbb{Z}$ ist bekannt.

Bemerkung 6.13. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$x \mapsto x^n$$
$$[0, \infty) \to [0, \infty)$$

stetig und strikt wachsend.
Daraus folgt: Es existiert eine Umkehrfunktion

$$\sqrt[n]{} : (0, \infty) \to [0, \infty)$$
$$x \mapsto \sqrt[n]{}$$

Satz 6.14. Es gilt für $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$:

$$a^r = \exp(r \log a)$$
$$\text{Insbesondere gilt: } e^r = \exp(r)$$

Beweis.

$$e^n = \underbrace{e \cdots e}_{n\text{-mal}} = \underbrace{\exp(1) \cdots \exp(1)}_{n\text{-mal}} = \exp(1 + \cdots + 1) = \exp(n) \text{ für } n \in \mathbb{N}$$
$$a^n = (\exp(\log(a)))^n = \exp(n \log(a)) \text{ Daraus folgt: Behauptung, OK für } \boxed{r \in \mathbb{N}}$$
$$a^0 \overset{Def!}{=} 1 = \exp(0 \cdot \log(a)) \text{ Daraus folgt: } r = 0 \text{ ist OK}$$

□

Für $x := \exp\left(\frac{1}{n} \log(a)\right)$. Ziel: $x = a^{\frac{1}{n}}$
Daraus folgt: $x^n = \left(\exp(\frac{1}{n} \log(a))\right)^n = \exp\left(\cancel{n}\frac{1}{\cancel{n}} \log(a)\right) = a \overset{\sqrt[n]{}}{\Rightarrow} x = a^{\frac{1}{n}}$

Behauptung gilt für $r \in \frac{1}{\mathbb{N}}$.
Für $r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ gilt:
$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\exp\left(\frac{1}{q}\log(a)\right)\right)^p = \exp\left(\frac{p}{q}\log(a)\right) = \exp\left(r\log(a)\right)$. Daraus folgt die Behauptung.
dies erlaubt die folgende Definition:

$$a^r := \exp(r\log(a)) \text{ für } a > 0 \text{ und } r \in \mathbb{R}$$

Ab jetzt definieren wir

$$e^z := \exp(z) \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

$$\text{z.B. } \boxed{e^{i\varphi} + 1 = 0}$$

Folgerung:
Für $a, b > 0, x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{x+y} \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\ a^x b^x &= (ab)^x \\ \frac{a^x}{b^x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \end{aligned}$$

Beweis. Übung! □

Folgerung 6.15.

$$\begin{aligned} \log(a^x) &= x\log(a) \\ (a^x)^y &= a^{xy} \text{ für } a > 0, x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Beweis. Übung! □

Lemma 6.16. Für $\alpha > 0$ gilt $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0}$ und $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x) = 0$

Beweis. $t := \log(x)$. Dann ist $t \to \infty$ äquivalent zu $x \to \infty$.
$\lim_{x\to\infty} \frac{log(x)}{x^\alpha} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{\exp(\alpha t)} = \lim_{s\to\infty} \frac{\frac{s}{\alpha}}{\exp(s)} = 0$ (1. Teil) - (2. Teil analog). □

Satz 6.17. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$
Insbesondere: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$.

Beweis. $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}\right)$
$I_n := \exp(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ Ziel: $I_n \to 0$
$I_n = \left(\exp\left(\frac{z}{n}\right)\right)^n - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(\exp\left(\frac{z}{n}\right) - 1 - \frac{z}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{z}{n}\right)\right)^k \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n-1-k}$

Daraus folgt: $|I-N| \leq \underbrace{\left|\frac{z}{n}\right| \left|\frac{\exp\left(\frac{z}{n}\right)-1-\frac{z}{n}}{\frac{z}{n}}\right|}_{\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left|\left(\exp\left(\frac{z}{n}\right)\right)^k\right| \left|1+\frac{z}{n}\right|^{n-1-k}$.

Es gilt also: $\exp(w) = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \cdots$.
$|\exp(w) - 1 - w| \leq \frac{2|w|^2}{2!}$ für $|w| \leq \frac{3}{2}$

Daraus folgt: $\left|\frac{z}{n}\right| \left|\frac{\exp\left(\frac{z}{n}\right)-1-\frac{z}{n}}{\frac{z}{n}}\right| \leq \frac{\frac{\cancel{2}\left(\frac{|z|}{n}\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{2}!}}{\left|\cancel{\frac{z}{n}}\right|} = \frac{|z|}{n}$ für n groß.

Betrachte:
$\sum_{k=0}^{n-1} \left|\exp\left(\frac{z}{n}\right)\right|^k \cdot \left|1+\frac{z}{n}\right|^{n-1-k}$
Allgemein gilt: $|e^w| \underbrace{=}\, w = x + iy |e^x| \underbrace{|e^{iy}}_{=1} = |e^x| = e^x = e^{Rew} \Rightarrow \boxed{|e^w| = e^{\Re w}}$.

Also $\exp\left|\frac{z}{n}\right| = \exp\left(\Re\left(\frac{z}{n}\right)\right| \leq \exp\left(\left|\frac{z}{n}\right|\right)$
$\left|1+\frac{z}{n}\right| \leq 1 + \frac{|z|}{n} \leq \exp\left(\frac{|z|}{n}\right)$
Daraus folgt: Summe $\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{|z|}{n}\right)\right)^{n-1} = (n-1)\exp\left(|z|\frac{n-1}{n}\right| \leq n \cdot \exp\left(|z|\right)$.

Daraus folgt: $|I_n| \leq \left|\frac{z}{n}\right| \underbrace{\left|\frac{\exp\left(\frac{z}{n}\right)-1-\frac{z}{n}}{\frac{z}{n}}\right|}_{\stackrel{n}{\to} 0} \cdot \cancel{n} \exp(|z|) \stackrel{n}{\to} 0.$

Daraus folgt: $I_n \to 0$
Daraus folgt die Behauptung. $\square$

7 Differentialrechnung

Wir wollen das lokale Verhalten von Funktionen genauer untersuchen. Insbesondere wollen wir f lokal durch eine *affin lineare* Funktion $f(x_0) + m_0(x - x_0)$ approximieren.

Definition 7.1. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \Omega$. Dann heißt f in x_0 differenzierbar (diffbar), falls der Grenzwert $f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.
$f'(x_0)$ heißt *Ableitung* von f an der Stelle x_0.

Bemerkung 7.2. Die Schreibweise $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ in Definition 7.1 bedeutet, dass der Grenzwert für jede Folge x_n aus $\Omega \setminus \{x_0\}$ existiert und unabhängig von der Folge ist. Natürlich muss dafür mindestens eine solche Folge existieren.

Definition 7.3. (Häufungspunkt einer Menge). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ (bzw. $\subset (X, d)$). Dann heißt x_0 *Häufungspunkt* von Ω, falls eine Folge in $\Omega \setminus \{x_0\}$ existiert die gegen x_0 konvergiert.

Beispiel 7.4. Wir wollen die Ableitung der Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty), x \mapsto \frac{1}{x}$ bestimmen.
Es gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\cancel{x_0 - x}}{x x_0} \frac{-1}{\cancel{x - x_0}} = \frac{-1}{x x_0}.$$

Damit gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0} \frac{-1}{x_0^2}.$$

Also ist $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ für $x_0 \in (0, \infty)$.

13.01.2014

Definition 7.5. Eine Menge $\Omega \subset (X, d)$ heißt *perfekt*, falls jedes $x \in \Omega$ Häufungspunkt von Ω ist.

Bemerkung 7.6. Die perfekten Intervalle sind für $a < b$:

$[a, b]$	$(-\infty, b]$	$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
$(a, b]$	$(-\infty, b)$	
$[a, b)$	(a, ∞)	
(a, b)	$[a, \infty)$	

Insbesondere ist $[a, a]$ nicht perfekt.

Satz 7.7. Für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (bzw $\mathbb{R}^m$) mit $\Omega \subset \mathbb{R}$ perfekt sind äquivalent:

(i) f ist differenzierbar in a

(ii) Es existiert $m_a \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^m$) mit $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-m_a(x-a)}{x-a} = 0$

(iii) Es existiert $m_0 \in \mathbb{R}^m$ und eine in a stetige Funktion $r : \Omega \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^m$) mit $r(a) = 0$ und $f(x) = \underbrace{f(a) + m_a(x-a)}_{\text{affin linear}} + r(x)(x-a)$

Bei ii) und iii) gilt $m_0 = f'(a)$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Klar, mit $m_a := f'(a)$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$$\text{Sei } r(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = a \\ \frac{f(x)-f(a)-m_0(x-a)}{x-a} & \text{für } x \neq a \end{cases}$$

Nach (ii) ist r stetig in a und $r(a) = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i):

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{m_0\cancel{(x-a)} + r(x)\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} \overset{x\to a}{\to} m_a \text{ (dabei wurde benutzt: } \lim_{x\to a} r(x) = a)$$

□

Man nennt $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ auch den *Differenzenquotienten* (für $x \neq a$).

Folgerung 7.8. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in a. Dann ist f stetig in a.

Beweis. Nach Satz 7.7 (iii) ist $f(x) = f(a) + ma(x-a) + r(x)(x-a)$ mit $\lim_{x\to a} r(x) = 0$. Folglich gilt $\lim_{x\to a} = f(x)$. □

Satz 7.7 sagt, dass man eine in a differenzierbare Funktion lokal affin linear approximieren kann (Tangente).

Bemerkung 7.9. Wir benutzen die Notation $h(x) \in \mathcal{O}(|x-a|) :\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{|h(x)|}{|x-a|} = 0$, d.h. h geht schneller gegen Null als $|x-a|$. Damit ist f in a differenzierbar genau dann, wenn $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a)) \in \mathcal{O}(|x-a|)$.

Schreibweise: Statt $f'(a)$ schreibt man auch $\frac{df}{dx}(a)$ oder auch $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$.

Beispiel 7.10. Schon gehabt:

a) Für $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ gilt $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. (Siehe oben.)

b) Für $f(x) = mx + b$ gilt $f'(x) = m$

c) Für $f(x) = b$ gilt $f'(x) = 0$

d) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, also $f(x) := \exp(x)$. Dann gilt $f'(x) = \exp(x)$. Beweis folgt:
Mit $x = a + h$ gilt

$$\frac{\exp(x) - \exp(a)}{x - a} = \frac{\exp(a+h) - \exp(a)}{x - a} = \frac{\exp(h) - 1}{h} \exp(a)$$

Aus der Restgliedabschätzung der Exponentialreihe, siehe Lemma 5.13 folgt, dass $|\exp(h) - 1 - h| \leq 2\frac{|h|^2}{2!}$ für $|h| \leq \frac{3}{2}$. Damit gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1. \tag{7.1}$$

Also folgt mit obiger Rechnung $\frac{\exp(x) - \exp(a)}{x - a} \to \exp(a)$ für $x \to a$, d.h. $h \to 0$.

Definition 7.11. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ perfekt und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^m$). Falls f in jedem $x \in \Omega$ differenzierbar ist, so heißt f *differenzierbar*. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto f'(x) \\ \Omega &\to \mathbb{R} \end{aligned}$$

heißt *Ableitung* von f. Wir schreiben: $f' = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx} f = \frac{\partial}{\partial x} f$.

Rechenregeln:

a) **Linearität der Ableitung:** Seien f, g differenzierbar in a und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Dann ist $\alpha f + \beta g$ diffenzierbar in a und $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$.

b) **Produktregel:** Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a, so ist fg differenzierbar in a und $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

c) **Quotientenregel:** Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a, so ist f/g differenzierbar in a und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Insbesondere gilt:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Beweis. zu a): siehe Übung!
zu b):

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\overset{x \to a}{\to} f'(a)} \underbrace{g(x)}_{\to g(a)} + f(a) \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\to g'(a)} \overset{x \to a}{\to} f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

zu c):

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} &= \frac{1}{g(x)g(a)} \frac{f(x)g(a) - g(x)f(a)}{x-a} \\
&= \frac{1}{g(x)g(a)} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(a) + f(a) \frac{\overbrace{g(a)-g(x)}^{\text{vertauscht!}}}{x-a} \right) \\
&\overset{x\to a}{\to} \frac{1}{g(a)g(a)} \left(f'(a)g(a) + f(a)(-g'(a))\right) \\
&= \frac{f(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2} \checkmark
\end{aligned}$$

□

Beispiel 7.12.

$$\begin{aligned}
&f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = -\frac{h'(x)}{(h(x))^2} = -\frac{1}{x^2} \\
&h(x) := x \Rightarrow h'(x) = 1
\end{aligned}$$

Satz 7.13. (Kettenregel) Sei $f : \Omega \to \setminus$ differenzierbar in a und $f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}$ und $g : Y \to \mathbb{R}$ (bzw $\mathbb{R}^m$) sei differenzierbar in $f(a)$. Dann ist $(g \circ f) : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzbar in a und

$$(g \circ f)'(a) = \underbrace{g'(f(a))}_{\text{äußere Ableitung}} \underbrace{f'(a)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Beweis. Da f differenzbar in a gilt:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)(x-a) \text{ mit } \lim_{x\to a} r(x) = r(a) = 0$$

Ebenso $g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + t(y)(y - f(a))$ mit $\lim_{y \to f(a)} t(y) = t(f(a)) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\overset{y=f(x)}{\Rightarrow} g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + t(f(x))(f(x) - f(a)) \\
&= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(ax - a' + s(x)(x-a) \\
&\text{mit } s(x) = g(f(a))r(x) + t(f(x))(f'(a) + r(a)) \\
&= (g \circ f)(a) + (g \circ f)'(a)(x-a) + \mathcal{O}(|x-a|) \text{ bleibt zu zeigen} \boxed{s(x) \overset{x-a}{\to} s(a) = 0}
\end{aligned}$$

$$s(x) \to 0 = s(a) \text{ da } r(x) \overset{x\to a}{\to} 0 \text{ und } t(y) \overset{y\to f(a)}{\to} 0$$

□

16.01.2013 Nach Satz7.7 (iii) folgt $(f \circ g)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Satz 7.14. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Sei $f^{-1} : J \to I$ die Umkehrfunktion mit $J := f(I)$. (Nach Satz 6.11 existiert diese, ist stetig und streng monoton).
Ist f differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f^{-1} differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$ und

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. Nach dem Zwischenwertsatz ist J ein Intervall. Da f strikt monoton, ist J sogar perfekt. Sei $(y_n)_n \subset J$ mit $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_0$ und definiere $x_n := f^{-1}(y_n)$. Dann gilt:
$x_n = f^{-1}(y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f^{-1}(y_0) = x_0$, da f^{-1} stetig ist. Folglich ergibt sich auch

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)},$$

da $f'(x_0)$ existiert. Also ist f^{-1} differenzierbar in y_0 und $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$. □

Beispiel 7.15. Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R};\ x \mapsto \log(x)$. Dann ist $f = g^{-1}$ mit $g(x) = \exp(x)$. Also gilt $\forall x \in (0, \infty)$:

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x},$$

da $g'(x) = \exp(x)$.

Bemerkung 7.16. Es gilt $\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$ für $m \in \mathbb{N}$. Das bleibt auch für $m \in \mathbb{Z}$ richtig:
<u>1. Fall ($m = 0$)</u>: $\frac{d}{dx}(x^0) = \frac{d}{dx}1 = 0$
<u>2. Fall ($m > 0$)</u>: Zunächst haben wir $\frac{d}{dx}(x^m) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{-m}}\right)$. Nach der Kettenregel gilt für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$. Also folgt mit $-m \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d}{dx}(x^m) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{-m}}\right) = \frac{-\frac{d}{dx}(x^{-m})}{(x^{-m})^2} = \frac{-(-m)x^{-m-1}}{x^{-2m}} = mx^{m-1}.$$

Wir können nun schreiben:

$$x^{m-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{m}x^m\right) \quad \text{für } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$
$$x^{-1} = \frac{d}{dx}(\log(x))$$

Erinnerung: $f' : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Ableitung.
Notation: $f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{\partial}{\partial x}f(x)$

Falls f' diffbar, so nennt man f zweimal differenzierbar und wir schreiben $(f)'' := (f')'$.
Ist f m-mal differenzierbar, so ist

$$f^{(m)} = \frac{d^m f}{dx^m} = \left(\frac{d}{dx}\right)^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m f \text{ die } m\text{-te Ableitung von } f \left(\frac{d}{dx} \text{ Ableitungsoperator}\right).$$

Insbesondere gilt nach Definition

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \quad \frac{d}{dx} f^{(m)} = f^{(m+1)}.$$

Definition 7.17. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $\Omega \subset X$. Dann heißt $C(\Omega, Y) := \{f : \Omega \to Y |\ f \text{ stetig}\}$ der Raum der stetigen Funktionen von Ω nach Y. Falls $Y = \mathbb{R}$, so schreiben wir kurz $C(\Omega) = C(\Omega, \mathbb{R})$.

Definition 7.18. Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}$ perfekt sei $C^k(\Omega) := C^k(\Omega; \mathbb{R}) :=$ $\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} |\ f$ ist k-mal stetig differenzierbar, d.h. $f^{(1)}, \dots, f^{(k)}$ existieren und sind stetig$\}$.

Definition 7.19. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ perfekt. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (bzw $\mathbb{R}^n$) heißt k-fach *stetig differenzierbar*, falls f k-fach differenzierbar ist und $f^{(k)}$ stetig ist. ($\Rightarrow f, f^{(1)}, \dots, f^{(k)}$ sind stetig)

Beispiel 7.20. $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right) \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R}) = C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.
Wir schreiben auch einfach: $\frac{1}{x} \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

Bemerkung 7.21. $C(\Omega) = C^0(\Omega)$

Satz 7.22. Der Raum $C^k(\Omega)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, d.h. es gilt:

a) $\left(\frac{d}{dx}\right)^j (\alpha f + \beta g) = \alpha \left(\frac{d}{dx}\right)^j f + \beta \left(\frac{d}{dx}\right)^j g$ für $f, g \in C^k(\Omega), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $j \in \{0, ..., k\}$

b) $\left(\frac{d}{dx}\right)^k (fg) = \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^j f\right) \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-j} g\right)$ (Leibniz'sche Formel)

Beweis. Übung. (Tipp für b): Induktion + Produktregel) □

Beispiel 7.23. a) $|x| \in C(\mathbb{R}), |x| \notin C^1(\mathbb{R})$, denn $\frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ -1 \text{ für } x < 0 \end{cases}$

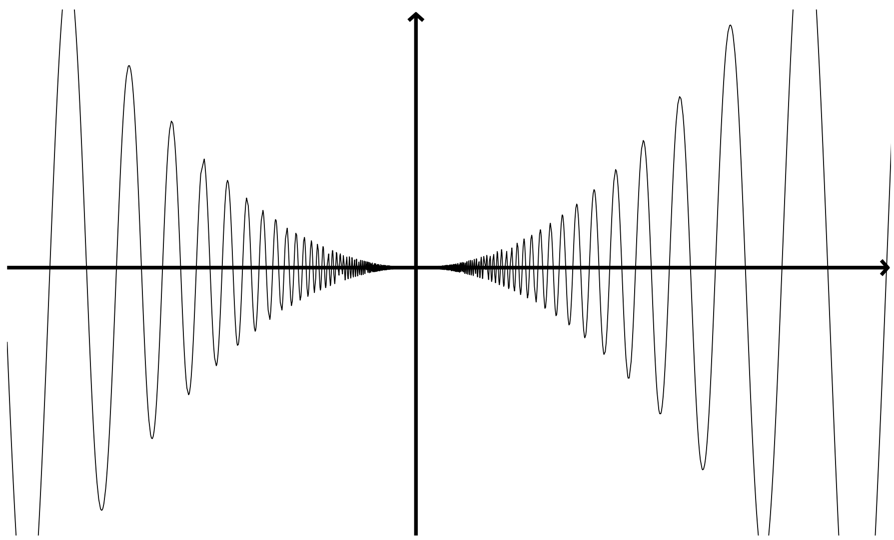
b) Sei $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$. Daraus folgt: $f'(x) = 2|x|$ und es gilt nach a), dass $f \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C^1(\mathbb{R})$.

c) $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$
Dann ist f stetig auf $\mathbb{R}$. Denn es gilt $\lim_{x \to 0 x \neq 0} |f(x)| \leq \lim_{x \to 0 x \neq 0} |x|^2 = 0$ und somit

auch $\lim_{x\to 0}|f(x)| = 0$, also $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.
Für $x \neq 0$ ist f differenzierbar und wir erhalten nach der Produktregel:

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}_{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nun gilt: $\lim_{x\to 0, x\neq 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ wie oben, aber $\lim_{x\to 0, x\neq 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nicht. ($\overline{\lim}\cdots = 1, \underline{\lim}\cdots = -1$).
Daraus folgt: $f \in C(\mathbb{R}), f \notin C^1(\mathbb{R}), f \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.
Wir erwarten aufgrund der Skizze, dass $f'(0) = 0$. Tatsächlich gilt
$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x\to 0,\ x\neq 0} 0$, also ist f in $x = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$.
Somit ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, aber f' nur auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig.



Eine Funktion f heißt einseitig diffbar in x_0, falls

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\searrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$\text{bzw } f'_-(x_0) = \lim_{x\nearrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existiert.}$$

Bemerkung 7.24. f ist in x_0 diffbar genau dann, wenn f links- und rechtseitig diffbar ist und $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. (Dann gilt $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$) Für $f(x) := |x|$ gilt $f'_+(0) = 1, f'_-(x) = 1$.

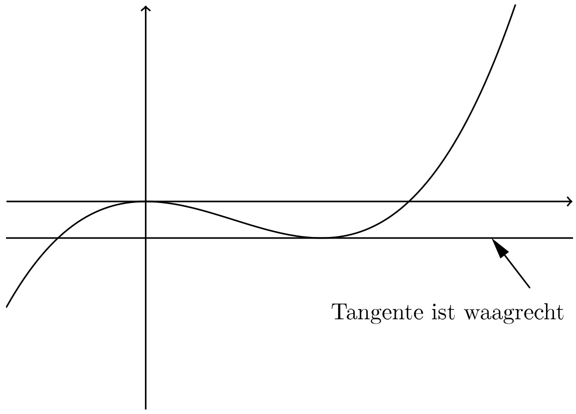
7.1 Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Wir untersuchen das lokale Verhalten einer Funktion bei Minima/Maxima.

Definition 7.25. Sei $f : (X, d) \to \mathbb{R}$. Dann hat f bei $x_0 \in X$ ein

a) *lokales Minimum*, falls es eine Umgebung U von x_0 gibt mit $f(x_0) \leq f(y)$ für alle $y \in U$.

b) *lokales Maximum*, falls es eine Umgebung U von x_0 gibt mit $f(x_0) \geq f(y)$ für alle $y \in U$.



Man sagt f hat ein *lokales Extremum* in x_0, falls f in x_0 ein lokales Minimum oder Maximum hat. x_0 heißt Extremalstelle (Minimalstelle, Maximalstelle).

Bemerkung 7.26. Hat f bei x_0 ein lokales Minimum, so hat $(-f)$ bei x_0 ein lokales Maximum.

Satz 7.27. Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ und habe bei $x_0 \in \mathring{\Omega}$ ein lokales Extremum. Ist f differenzierbar in x_0, so gilt $f'(x_0) = 0$. ($x_0 \in \mathring{\Omega} \Leftrightarrow x_0$ ist im Inneren von Ω)

20.01.2014

Beweis. Sei o.E. x_0 eine Minimalstelle von f (sonst betrachte $-f$). Dann existiert eine Umgebung U von x_0, so dass $f(x_0) \leq f(y)$ für alle $y \in U$. Also $f(y) - f(x_0) \geq 0$ für alle $y \in U$ und wir erhalten

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{für } y > x_0 \\ \leq 0 & \text{für } y < x_0 \end{cases}.$$

Da f differenzierbar in x_0 ist, folgt mit dem Grenzwertübergang $y \searrow x_0$ bzw. $y \nearrow x_0$, dass auch $f'_+(x_0) \geq 0$ und $f'_-(x_0) \leq 0$. Schließlich gilt also $0 \leq f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0$ und somit $f'(x_0) = 0$. $\square$

Beispiel 7.28. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ hat ein (globales) Minimum bei $x = 0$. Es gilt $f'(x) = 2x$, also $f'(0) = 0$.

Folgerung 7.29. Sei $f \in C([a, b])$ (mit $a < b$) und f differenzierbar auf (a, b). Dann gilt

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) := \max f([a, b]) = \max\{f(a), f(b), \max\{f(x) : x \in (a, b) \text{ und } f'(x) = 0\}\}.$$

Beweis. f nimmt als stetige Funktion auf dem Kompaktum $[a, b]$ sein Maximum an. $\square$

Satz 7.30. (Satz von Rolle): Sei $f \in C([a, b])$ differenzierbar auf (a, b) mit $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Falls f konstant ist, wähle $\xi = \frac{a+b}{2}$. Anderenfalls nimmt die stetige Funktion f auf dem Kompaktum ihr Maximum und ihr Minimum an. Da also f nicht konstant ist existiert ein $x_0 \in (a, b)$, so dass x_0 Extremalstelle von f ist. Mit Satz **??** folgt $f'(x_0) = 0$. $\square$

Satz 7.31. (Mittelwertsatz): Sei $f \in C([a, b])$ differenzierbar auf (a, b). Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $\underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{mittlere Steigung}} = f'(\xi)$.

Beweis. Sei $g(x) := f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. Dann gilt $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = f(a) = g(a)$. Nach dem Satz von Rolle (Satz 7.30) existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$. Also erhalten wir $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ und die Behauptung $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ folgt. $\square$

7.2 Monotonie von Funktionen

Satz 7.32. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall und $f \in C(I)$. Weiterhin sei f differenzierbar auf $\mathring{I}$. Dann gilt:

a) f ist monoton wachsend genau dann, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathring{I}$.
b) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathring{I}$, so ist f strikt wachsend (Umkehrung gilt nicht, vgl. $f(x) = x^3$).

Ersetzt man "$\geq$" durch "$\leq$" und "$>$" durch "$<$", so gilt der Satz für "fallend" anstatt "fallend".

Beweis. **zu a):** "$\Rightarrow$": Da f monoton wachsend ist, gilt für $x, y \in \mathring{I}$: $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$. Also folgt $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$ für $y \neq x$. Mit dem Grenzübergang $y \to x$ ergibt sich schließlich $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathring{I}$.
"$\Leftarrow$": Seien $x, y \in I$, $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 7.31) existiert ein $\xi \in (x, y)$ mit $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) \geq 0$. Da $y - x > 0$, erhalten wir $f(y) - f(x) \geq 0$ und somit ist f monoton wachsend.
zu b): Analog zu a). $\square$

Folgerung 7.33. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $\mathring{I}$. Dann ist f genau dann konstant, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathring{I}$.

Beweis. "$\Rightarrow$": klar
"$\Leftarrow$": Da $f' \geq 0$ und $f' \leq 0$ ist f sowohl monoton wachsend als auch fallend, also konstant. $\square$

Folgerung 7.34. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall und $f \in C(I)$ differenzierbar in $\mathring{I}$. Falls $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathring{I}$, so ist f injektiv auf I und $f(I)$ ist ein perfektes Intervall.

Beweis. Angenommen es gilt $f(x_1) = f(x_2)$ für ein Paar $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Dann existiert nach dem Satz von Rolle (Satz 7.30) ein $\xi \in (x_1, x_2)$, so dass $f'(\xi) = 0$. ($\lightning$ zu $f'(\xi) \neq 0$). Also ist f injektiv und $f(I)$ ist ein perfektes Intervall nach dem Zwischenwertsatz. $\square$

Bemerkung 7.35. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall und $f \in C(I)$ differenzierbar auf $\mathring{I}$. Weiterhin sei $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathring{I}$. Dann ergeben sich die beiden Möglichkeiten:

a) $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathring{I}$ (dann ist f strikt wachsend).
b) $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathring{I}$ (dann ist f strikt fallend).

7.3 Konvexität und Differenzierbarkeit

Definition 7.36. Eine Teilmenge C eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in C$ und $t \in [0,1]$ die “konvexe Linearkombination“ $((1-t)x + ty) \in C$.
Für $x, y \in V$ definieren wir die *Verbindungslinie zwischen x und y* als
$[x, y] := \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$. Also ist $C \subset V$ genau dann konvex, wenn $[x, y] \subset C$ für alle $x, y \in C$.

Bemerkung 7.37. Die konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.

Definition 7.38. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$.

a) Dann heißt f *konvex*, falls $f((1-t)x + ty) \leq (t-1)f(x) + tf(y)$ für alle $x, y \in I$ und $t \in [0,1]$, d.h. f unterhalb der Sekanten liegt. (Es genügt $x \neq y$ und $t \in (0,1)$ zu betrachten.)
b) Gilt sogar $f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y)$ für alle $x, y \in I$ mit $x \neq y$ und für alle $t \in (0,1)$, so heißt f *strikt konvex*.

Beispiel 7.39. a) $f(x) = |x|$ für $x \in \mathbb{R}$ ist konvex, aber nicht strikt konvex.
b) $f(x) = ax + b$ ist konvex (aber nicht strikt konvex).
c) $f(x) = x^2$ ist strikt konvex.

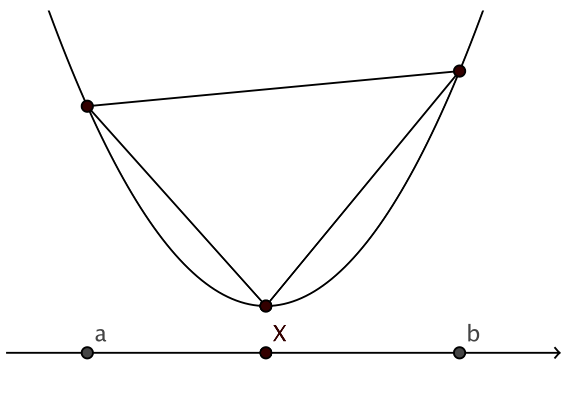
Bemerkung 7.40. (Übung): Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$. Definiere den Epigraph von f als *epi*$(f) := \{(x,t) : t \geq f(x) \text{ und } x \in I\}$. Dann gilt: f ist konvex $\Leftrightarrow$ *epi*(f) konvex.

Definition 7.41. f heißt *konkav* falls $-f$ konvex ist.

Beispiel 7.42. a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x^2$ ist konkav.
b) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ ist konkav. 27.01.2014

Bemerkung 7.43. Sei I ein perfektes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

a) f ist konvex
b) Für alle $a, b, x \in I$ mit $a < x < b$ gilt:
$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$
c) Für alle $a < x < b$ gilt:
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$
d) Für alle $a < x < b$ gilt:
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$



Beweis. Nur “d)⇒c):“ (Rest analog)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + \frac{f(b)-f(x)}{b-x}(b-x)}{b-a} \overset{\text{d)}}{\leq} \frac{\frac{f(b)-f(x)}{b-x}(x-a+b-x)}{b-a} = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

□

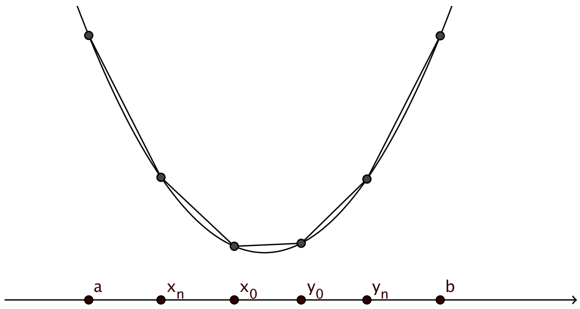
Satz 7.44. Sei I ein perfektes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Dann ist f genau dann (strikt) konvex, wenn f' (strikt) wachsend ist.

Beweis. Beweis nur für "strikt". Seien $a, b \in I$, $a < b$.

"$\Rightarrow$": Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset I$ eine monoton fallende, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset I$ eine monoton wachsende Folge, so dass $x_0 < y_0$ und $x_n \searrow a$, $y_n \nearrow b$. Da f strikt konvex ist, gilt analog zur Bemerkung 7.43 (für f strikt konvex kann hier überall $\leq$ durch $<$ ersetzt werden):

$\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} < \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} < \frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0} <$
$\frac{f(y_n)-f(y_0)}{y_n-y_0} < \frac{f(b)-f(y_n)}{b-y_n}$

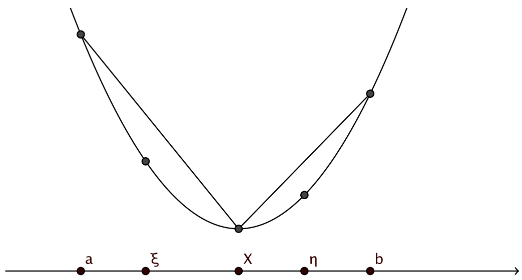
$\overset{n\to\infty}{\Rightarrow} f'(a) \leq \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} < \frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0} \leq f'(b).$



Also haben wir $f'(a) < f'(b)$ gezeigt und da $a, b \in I, a < b$ beliebig gewählt waren, folgt dass f' strikt wächst.

"$\Leftarrow$": Nach Bemerkung 7.43 genügt es zu zeigen, dass

$(*)\quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ für alle $a < x < b$.



Nach dem Mittelwertsatz (7.31) existiert ein $\xi \in (a, x)$ und ein $\eta \in (x, b)$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ und } f'(\eta) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Da f' strikt wachsend und $\xi < \eta$ ist, gilt $f'(\xi) < f'(\eta)$. Also folgt $(*)$.

□

Folgerung 7.45. Sei I ein perfektes Intervall und f zweimal differenzierbar auf I (bzw. $\mathring{I}$).

a) f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathring{I}$.
b) Ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathring{I}$, so wächst f' strikt und f ist strikt konvex.

Beispiel 7.46. $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$

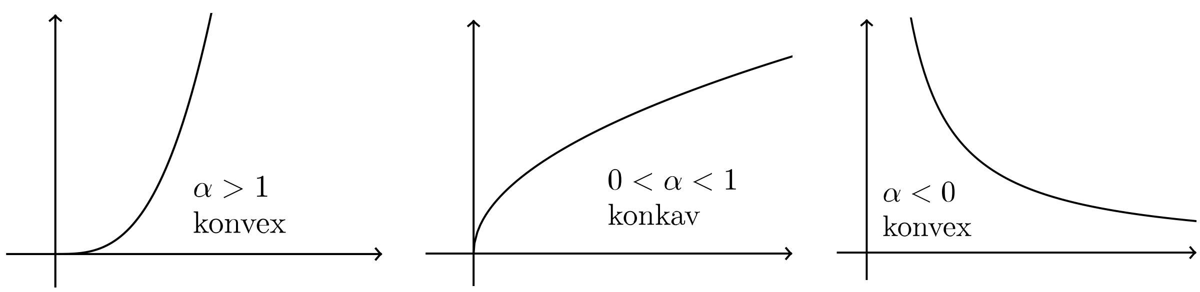
a) $\exp' = \exp$ ist strikt wachsend. Also ist exp strikt konvex.
b) $\exp''(x) = \exp(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$. Daraus folgt ebenso, dass exp strikt konvex ist.

Beispiel 7.47. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Betrachte die Funktion
$f : (0,\infty) \to (0,\infty);\ x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \cdot \log(x))$. Dann gilt:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \begin{cases} > 0 & \text{für } \alpha > 1 \Rightarrow f \text{ ist strikt konvex} \\ = 0 & \text{für } \alpha = 1 \\ < 0 & \text{für } 0 < \alpha < 1 \Rightarrow f \text{ ist strikt konkav} \\ = 0 & \text{für } \alpha = 0 \\ > 0 & \text{für } \alpha < 0 \Rightarrow f \text{ ist strikt konvex} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\alpha = 1 : f(x) = x && \text{ist konvex + konkav (linear)} \\ &\alpha = 0 : f(x) = 1 && \text{ist konvex + konkav (konstant)} \end{aligned}$$



Beispiel 7.48. Wir betrachten $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Dann erhalten wir $\log'(x) = \frac{1}{x}$ und $\log''(x) = -\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{>0} < 0$. Also ist log strikt konkav.

Lemma 7.49. (Young'sche Ungleichung). Seien $p, p' \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (p' heißt dualer oder konjugierter Exponent von p). Dann gilt für alle $a, b \geq 0$:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

(Für $p = 2$ und $p' = 2$ ergibt sich wie von der binomischen Formel bekannt: $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$).

Beweis. Definiere $\Theta := \frac{1}{p'} \in (0,1)$. Dann folgt $\frac{1}{p} = 1 - \Theta$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) &= \log\left((1-\Theta)a^p + \Theta b^{p'}\right) \overset{\text{log konkav}}{\geq} (1-\Theta)\log(a^p) + \Theta\log(b^{p'}) \\ &= \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log(b^{p'}) = \frac{\cancel{1}}{\cancel{p}}\cancel{p}\log(a) + \frac{\cancel{1}}{\cancel{p'}}\cancel{p'}\log(b) = \log(ab) \end{aligned}$$

Da exp monoton steigend ist, folgt schließlich:

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \geq ab \qquad \square$$

Bemerkung 7.50. (Unter den gleichen Vorraussetzungen wie oben) gilt $ab = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p}b^{p'}$ genau dann, wenn $a^p = b^{p'}$, d.h. $a^{p-1} = b$ (da $p' = \frac{p}{p-1}$).

Bemerkung 7.51. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt für alle $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ mit $\lambda_1 + ...\lambda_n = 1$ und alle $x_1, ...x_n \in I$ die Ungleichung

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

$$\text{bzw. in Summenschreibweise: } f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$$

Hierbei ist der Fall $n = 1$ klar, der Fall $n = 2$ ist genau die Definition "konvex" und der Fall $n \geq 3$ kann per Induktion bewiesen werden ($\to$ Übung).

Lemma 7.52. Für $n \in \mathbb{N}$. und $x_1, ...x_n \geq 0$ gilt:

$$\text{(geometrisches Mittel) } \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j} \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j \text{ (arithmetisches Mittel)}$$

Beweis. Wir verwenden die Konkavität des Logarithmus und erhalten nach der letzten Bemerkung (7.51):

$$\log\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \log(x_j) = \frac{1}{n}\log\left(\prod_{j=1}^n x_j\right)$$

Da exp monoton steigend ist, folgt:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j \geq \exp\left(\frac{1}{n}\log\prod_{j=1}^n x_j\right) = \left(\prod_{j=1}^n x_j\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \square$$

7.4 die Regeln von L'Hospital

Ziel ist es Grenzwerte der Form $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =?$ "$\frac{0}{0}$" zu berechnen mit $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0$.
Motivation:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - \overbrace{f(a)}^{=0}}{g(x) - \underbrace{g(a)}_{=0}} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \overset{x\to a}{\to} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

für $f, g \in C^1$ falls $g'(a) \neq 0$.

Satz 7.53. Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und g' habe keine Nullstelle (auf (a,b)). Ferner sei *entweder*
a) $\lim_{x\searrow a} f(x) = \lim_{x\searrow a} g(x) = 0$ *oder*
b) $\lim_{x\searrow a} g(x) = \infty$
Dann gilt:

$$\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der zweite Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert. Der Fall $a = -\infty$ ist erlaubt.

30.01.2014

Lemma 7.54. (Zweiter Mittelwertsatz) Seien $f, g \in C([a,b])$ diffbar auf (a,b). Es gelte $g(b) \neq g(a)$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Beweis. Sei $h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$. Dann gilt $h(a) = f(a) = h(b)$. Also existiert nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = 0$. ($h \in C([a,b])$ und differenzierbar auf (a,b)). Daraus folgt $0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$. Schließlich ergibt sich $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ □

Beweis. (Satz von L'Hospital) Es existiere $\alpha := \lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Zwischenbehauptung: $\limsup_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \alpha$.
Beweis: Wir können annehmen an, dass $\alpha < \infty$ (sonst klar). Seien also $\alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \alpha_1 < \alpha_0$. Wähle zudem $x_1 \in (a,b)$, so dass $\frac{f'(x)}{g'(x)} < \alpha_1$ für alle $x \in (a, x_1)$. Das ist nach der Definition des Grenzwerts $\lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ möglich. Seien weiterhin $x, y \in (a, x_1)$ mit $a < x < y < x_1$. Dann existiert nach dem zweiten Mittelwertsatz (7.54) ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < \alpha_1. \ (\star)$$

Zu Fall a)**:** Mit $x \searrow a$ folgt $\frac{f(y)}{g(y)} \leq \alpha_1$ für alle $y \in (a, x_1)$ (da $\lim_{x\searrow a} f(x) = \lim_{x\searrow a} g(x) = 0$). Lassen wir nun auch $y \searrow a$, erhalten wir $\limsup_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \alpha_1$ für alle $\alpha_1 > \alpha$. Also gilt $\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \alpha$.

Zu Fall b)**:** Zu festem $y \in (a, x_1)$ ist $g(y) - g(x) < 0$ für x nahe bei a, da $\lim_{x\searrow a} g(x) = \infty$. Also erhalten wir nach $(\star)$, dass $f(y) - f(x) > \alpha_1(g(y) - g(x))$ für x nahe bei a. Durch Multiplizieren beider Seiten mit $\frac{1}{g(x)}$ folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f(y)}{g(x)} - \alpha_1 \frac{g(y)}{g(x)} + \alpha_1.$$

Im Grenzübergang $x \searrow a$ konvergiert die rechte Seite gegen α_1. Als Konsequenz ergibt sich $\limsup_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \alpha_1$ für alle $\alpha_1 > \alpha$ und damit auch $\limsup_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \alpha$. Die Zwischenbehauptung ist also gezeigt.

Analog erhalten wir $\liminf_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)} \geq \alpha$. (Ersetze einfach f durch $-f$). Zusammen ergibt sich ($\limsup = \liminf$) $\lim_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$. □

Bemerkung 7.55. Die Regeln von L'Hospital gelten auch für $a = -\infty$, $x \nearrow b$ (bzw. $x \to b$), $b = \infty$ und $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$.

Beispiel 7.56. a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \overset{\boxed{\frac{0}{0}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = \frac{\cos(0)}{1} = \frac{1}{1} = 1$

b) $\lim_{x\searrow 0}\frac{\cos(x)-1}{x^3} \overset{\boxed{\frac{0}{0}}}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{-\sin(x)}{3x^2} \overset{\boxed{\frac{0}{0}}}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{\overbrace{-\cos(x)}^{\to -1}}{\underbrace{6x}_{\to 0}} = -\infty$

c) $\lim_{x\searrow 0} x\log(x) = \lim_{x\searrow 0}\frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\boxed{\frac{-\infty}{\infty}}}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\searrow 0}(-x) = 0$

8 Taylor'schen Formeln

Eine stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann man an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ lokal durch die Konstante $f(x_0)$ approximieren. Ist f sogar differenzierbar kann man sie lokal (um x_0) durch das lineare Polynom $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ approximieren.

Ziel: Für $f \in C^m$ approximiere f lokal (um x_0) durch Polynome höherer Ordnung.

Frage: Lässt sich das mit Hilfe von $f(x_0), f'(x_0), ..., f^{(m)}(x_0)$ machen?

Motivation: Sei $f(x)$ ein Polynom: $f(x) = \sum\limits_{a=0}^{n} b_k x^k$. Wir wollen herausfinden, in welchem Zusammenhang hier f mit $f(x_0), f'(x_0), ..., f^{(m)}(x_0)$ steht.

Der Einfachkeit halber betrachten wir den **Fall** $x_0 = 0$. Dann erhalten wir:

$$f(0) = b_0$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k k x^{k-1}$$

$$\text{(mit Indexverschiebung } j = k-1) \quad = \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}(j+1)x^j$$

$$\Rightarrow f'(0) = b_1$$

$$\text{Für } m \in \{2; \dots ; n\}: \quad f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} b_k \underbrace{k(k-1)\cdots(k-m+1)}_{m \text{ Faktoren}} x^{k-m}$$

$$\text{(mit Indexverschiebung } j = k-m) \quad = \sum_{j=0}^{n-m} b_{j+m}(j+m)\cdots(j+1)x^j$$

$$\Rightarrow \quad f^{(m)}(0) = b_m m(m-1)\cdots 1 = m! \cdot b_m$$

So ergibt sich

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Im Allgemeinen Fall ($f \neq$ Polynom) könnnen wir nur

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \mathit{Fehler}$$

erwarten.
Notation (Landau'schen Symbole): Wir schreiben $f(x) \in \mathcal{O}(|x-x_0|^\alpha)$, $[x \to x_0]$, falls $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{|x-x_0|^\alpha} = 0$ ("f geht schneller gegen Null als $|x-x_0|^\alpha$").

Bemerkung 8.1. $f \in \mathcal{O}(|x-x_0|^\alpha)$ falls ein $K \geq 0$ existiert, so dass $\frac{|f(x)|}{|x-x_0|^\alpha} \leq K$ in einer Umgebung von x_0.
f stetig in $x_0 \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \in \mathcal{O}(1)$.
f diffbar in $x_0 \Leftrightarrow f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)] \in \mathcal{O}(|x-x_0|^1)$.
<u>Ziel:</u> $f(x) - \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right] \in \mathcal{O}(|x-x_0|^n)$.

03.02.2014

Satz 8.2. (Taylor'sche Formel mit Restgliedabschätzung). Sei $n \in \mathbb{N}_0$, I ein perfektes Intervall und $f \in C^N(I;\mathbb{R})$. Dann existiert zu jedem $x_0 \in I$ eine Funktion $R_n(f,x_0) \in C(I)$. mit

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{:=T_n(f,x_0)(x)} + \underbrace{R_n(f,x_0)(x)}_{\text{Restglied}} \text{ für alle } x \in I.$$

Das Restglied erfüllt die Abschätzung:

$$|R_n(f,x_0)(x)| \leq \frac{1}{(n-1)!} \sup_{0<t<1} \left[|f^{(n)}(\underbrace{x_0 + t(x-x_0)}_{\in[x_0,x]}) - f^{(n)}(x_0)| \cdot |x-x_0|^n \right] \text{ für } x \in I$$

.

Folgerung 8.3. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 8.2 gilt:

$$f(x) - \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right] = R_n(f,x_0)(x) \in \mathcal{O}(|x-x_0|^n) \text{ für } x \to x_0$$

Beweis. (von Satz 8.2)

$$\text{Sei } R_n(f,x_0)(x) := f(x) - \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n\right)$$

$$\text{und } h(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0 + t(x-x_0))}{k!}(x-x_0)^k(1-t)^k - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n(1-t)^n$$

$$\text{Dann gilt } h(1) = f(x) - \frac{f^{(0)}(x)}{0!} \cdot 1 \cdot 1 - 0 = 0$$

$$\text{und } h(0) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = R_n(f,x_0)(x)$$

Also existiert nach dem Mittelwertsatz (7.31) ein $\xi \in (0,1)$, so dass

$$|R_n(f,x_0)(x)| = |h(1) - h(0)| = |1-0||h'(\xi)| \leq \sup_{0<t<1} |h'(t)|$$

Wir berechnen also

$$h'(t) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \frac{d}{dt}(f^{(k)}(x_0 + t(x-x_0))(1-t)^k) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \underbrace{\frac{d}{dt}((1-t)^n)}_{-n(1-t)^{n-1}}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left[f^{(k+1)}(x_0+t(x-x_0))(x-x_0)(1-t)^k - f^{(k)}(x_0+t(x-x_0))k(1-t)^{k-1}\right]$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n n(1-t)^{n-1}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0+t(x-x_0))}{k!}(x-x_0)^{k+1}(1-t)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0+t(x-x_0))}{(k-1)!}(x-x_0)^k(1-t)^{k-1}$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^n(1-t)^{n-1}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0+t(x-x_0))}{(k-1)!}(x-x_0)^k(1-t)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0+t(x-x_0))}{(k-1)!}(x-x_0)^k(1-t)^{k-1}$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^n(1-t)^{n-1}$$

$$= -\frac{f^{(n)}(x_0+t(x-x_0))}{(n-1)!}(x-x_0)^n(1-t)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^n(1-t)^{n-1}$$

Damit erhalten wir

$$h'(t) = -\frac{1}{(n-1)!}(x-x_0)^n(1-t)^{n-1}(f^{(n)}(x_0+t(x-x_0)) - f^{(n)}(x_0))$$

und mit $|R_n(f,x_0)(x)| \leq \sup_{0<t<1} |h'(t)|$ folgt die Behauptung. □

Definition 8.4. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = T(f,x_0)(x)$ heißt Taylorreihe von f an der Stelle x_0.

Beispiel 8.5. Betrachte $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. $f(x) = \exp(x)$. Wir wollen die Taylorreihe im Punkt $x_0 := 0$ bestimmen. Dazu berechnen wir $f^{(n)}(x) = \exp(x)$, also $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Wir erhalten also

$$T(\exp,0)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x1n}{n!} = \exp(x).$$

Insbesondere gilt $\lim\limits_{m\to\infty} T_m(\exp,0)(x) = T(\exp,0)(x)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 8.6. Dies gilt nicht immer. Betrachten wir zum Beispiel

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

Dann gilt (ohne Rechnung): $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und somit $T(f,0)(x) = 0 \neq f(x)$ für $x > 0$.

Satz 8.7. (Lagrange'sches Resglied). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall, $f \in C^n(I)$ sowie $(n+1)$ - mal differenzierbar auf $\mathring{I}$. Dann gibt es für $x, x_0 \in I$ ein $\xi \in (x_0, x)$ (bzw. (x, x_0) für $x < x_0$) mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Beweis. Für $x, x_0 \in I$ sei

$$g(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \text{ und } h(t) := (x-t)^{n+1}.$$

Dann gilt $g(x) = f(x)$ und $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = T_n(f,x_0)(x)$, also $g(x)-g(x_0) = R_n(f,x_0)(x)$. Außerdem erhalten wir $h(x) - h(x_0) = -(x-x_0)^{n+1}$. Entsprechend den Vorraussetzungen an f sind die Funktionen g und h differenzierbar auf $\mathring{I}$ und stetig auf I. Nach zweitem Mittelwertsatz existiert also ein $\xi \in (x, x_0)$ (bzw (x_0, x)) mit

$$g(x) - g(x_0) = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}(\underbrace{h(x) - h(x_0)}_{\neq 0 \text{ da } x \neq x_0})$$

Wir berechnen also zunächst

$$\begin{aligned}
h'(t) &= -(n+1)(x-t)^n \\
g'(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k(x-t)^{k-1} \cdot (-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \\
&= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.
\end{aligned}$$

Einsetzen der Ableitungen ergibt schließlich

$$\begin{aligned} R_n(f,x_0)(x) &= g(x) - g(x_0) = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}(h(x) - h(x_0)) = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n! \cdot (-1)} \frac{(x-\xi)^n}{(n+1)(x-\xi)^n} \cdot (-1)(x-x_0)^{(n+1)} = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 8.8. (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema). Sei I ein perfektes Intervall und $f \in C^n(I)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Für ein $a \in \mathring{I}$ gelte $f'(a) = f^{(2)}(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ und $f^{(n)}(a) \neq 0$. Dann gilt

a) Ist n ungerade, so ist a keine Extremalstelle.
b) Ist n gerade und $f^{(n)}(a) > 0$, so hat f bei a ein lokales Minimum.
c) Ist n gerade und $f^{(n)}(a) < 0$, so hat f bei a ein lokales Maximum.

Beweis. Die Taylorentwicklung von f bis Ordung n gibt uns

$$f(x) = f(a) + 0 + ... + 0 + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathcal{O}(|x-a|^n).$$

Nach Definition geht nun $\mathcal{O}(|x-a|^n)$ für $x \to a$ schneller gegen Null als $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Notieren wir $\gamma := \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}(> 0)$, existiert also ein $\delta > 0$ mit

$$\frac{|\mathcal{O}(|x-a|^n)|}{|x-a|^n} < \frac{\gamma}{2} \text{ für } |x-a| < \delta.$$

Zu a): Nehmen wir $\frac{f^{(n)}(a)}{n!} > 0$ an, folgt $\gamma = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ und es gilt für $x > a$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathcal{O}(|x-a|^n) \geq f(a) + \underbrace{(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} - \frac{\gamma}{2})}_{\frac{\gamma}{2}>0} \underbrace{(x-a)^n}_{>0 \text{ für } x>a}.$$

Es folgt also $f(x) > f(a)$ für $x > a$.
Analog erhalten wir für $x < a$

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{\gamma}{2}|x-a|^n = f(a) + \underbrace{(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} - \frac{\gamma}{2})}_{\geq\frac{\gamma}{2}>0} \underbrace{(x-a)^n}_{<0 \text{ für } x<a}$$

und somit $f(x) < f(a)$ für $x < a$. Also ist a keine Extremalstelle von f.
Die Fälle b) und c) werden analog bewiesen. □

06.02.2014

Beispiel 8.9. Sei

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

Aufgabe: Bestimme die Minima und Maxima von f.

Lösung: Nach der Quotientenregel $\left[\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\right]$ gilt $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Falls $a \in \mathbb{R}$ mit $f'(a) = 0$, gilt $-\frac{2a}{(1+a^2)^2} = 0$, also $a = 0$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2(1+x^2) - 8x^2}{(1+x^2)^3} = -\frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3} \\ \Rightarrow f''(0) &= -\frac{2}{1} = -2 < 0 \end{aligned}$$

Also hat f bei a ein lokales Maximum. Außerdem gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 < f(0) = 1,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 < f(0).$$

Somit ist das Maximum bei a sogar global.

Alternative:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \begin{cases} < 0, & \text{für } x > 0 \\ > 0, & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Also ist f strikt wachsend auf $(-\infty, 0)$ und strikt fallend auf $(0, \infty)$. Deshalb hat f ein globales Maximum bei $a = 0$ mit $f(0) = 1$

Beispiel 8.10. Bestimme $T_2(f, 0)$ (Taylorpolynom von f an der Stelle 0 von Grad 2) mit f wie in Beispiel 8.9.
Lösung:

$$\begin{aligned} T_2(f,0)(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k \\ &= 1 + 0x + \frac{(-2)}{2!}x^2 = 1 - x^2 \end{aligned}$$

Alternative: Wir arbeiten für $|x| < 1$ ($\Rightarrow |-x^2| < 1$) mit der geometrischen Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k$$

Wir werden später sehen: Die Taylorreihe einer Reihe ist wieder die Reihe selbst.

9 Potenzreihen

Für eine Folge $a_k \in \mathbb{C}$ heißt

$$a := \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \text{ (formale) Potenzreihe}$$

(unabhängig von Konvergenz oder Werten für X). Man schreibt auch

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}\,[X] = \{\text{Menge der formalen Potenzreihen}\}.$$

Bemerkung 9.1.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k\right) := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) X^k$$

Cauchyprodukt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k\right) := \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}\right) X^k$$

$$\operatorname{dom}(a) := \{z \in \mathbb{C} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ konvergiert in } \mathbb{C}\}$$

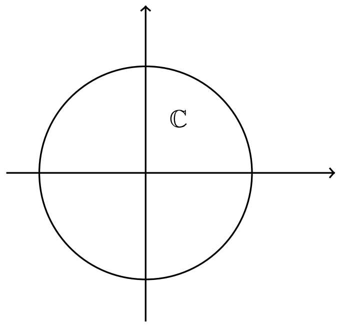
„dom"= "domain"(Definitionsbereich); Es gilt stets $0 \in \operatorname{dom}(a)$.

Beispiel 9.2. Wir betrachten die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} X^k$. Für die Konvergenz ergibt sich gemäß Wurzelkriterium:

- Konvergiert für $|x| < 1$ absolut
- Divergiert für $|x| > 1$
- Divergiert für $|x| = 1$ (da $x^k \not\to 0$)

Also haben wir $\operatorname{dom}\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right) = B_1(0)$

Satz 9.3. Zu jeder Potenzreihe $a = \sum_{a=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ existiert genau ein $R \in [0, \infty]$ („Konvergenzradius“) mit:



a) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < R$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| > R$ (Keine Aussage für $|x| = R$).

b) $R = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$ $\left[\text{Konvention: } \frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0\right]$

$B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ heißt Konvergenzkreis.

Beweis. Wir verwenden das Wurzelkriterium:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \limsup_{k\to\infty} \left(\sqrt[k]{|a_k|}|x| \right) = |x| \underbrace{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}_{=:\frac{1}{R}}$$

Es gilt also:

$$\frac{|x|}{R} < 1 \Rightarrow \text{ Reihe konvergent}$$
$$\frac{|x|}{R} > 1 \Rightarrow \text{ Reihe divergent}$$

□

Später: Potenzreihen sind C^{∞} auf ihrem (offenen!) Konvergenkreis und dort gilt

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_k X^k) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k X^{k-1}.$$

Beispiel 9.4. Wir betrachten für $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Dann gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = 0.$$

Also erhalten wir den Konvergenzradius $R =$“$\frac{1}{0}$“ $= \infty$ und $\mathrm{dom}(\exp) = \mathbb{C}$. Betrachten wir den umgekehrten Quotienten wie im Quotientenkriterium erhalten wir ebenfalls

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty$$

Bemerkung 9.5. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Falls $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert, so ist $R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ (Beweis: Quotientenkriterium).

Bemerkung 9.6. (Rechenregeln) Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ mit Konvergenzradien R_a und R_b. Sei $R = \min\{R_a, R_b\}$. Dann gilt für alle $|x| < R$:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k}_{I}$$

$$\text{und} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}\right) x^k}_{II}$$