Satz von Sobolev

Lisa Steyer

LMU München

Für $p < n$ soll

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|\nabla u\|_p, \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

für alle $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ erfüllt sein.
Frage: Wie muss p^* gewählt sein?
Betrachte $u_R(x) = u(Rx)$. Dann gilt: $(\nabla u_R)(x) = R(\nabla u)(Rx)$ und damit:

$$\|u\|_{p^*} = \left(\int |u(x)|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} = R^{\frac{n}{p^*}}\|u_R\|_{p^*} \overset{!}{\leq} R^{\frac{n}{p^*}} C \left(\int |\nabla u_R|^p(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= R^{\frac{n}{p^*}+1} C \left(\int |\nabla u|^p(Rx) dx\right)^{\frac{1}{p}} = R^{\frac{n}{p^*}+1-\frac{n}{p}} C\|\nabla u\|_p$$

Folglich muss gelten: $\frac{n}{p^*} + 1 - \frac{n}{p} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^* = \frac{np}{n-p}$

Für $p < n$ soll

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|\nabla u\|_p, \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

für alle $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ erfüllt sein.
Frage: Wie muss p^* gewählt sein?
Betrachte $u_R(x) = u(Rx)$. Dann gilt: $(\nabla u_R)(x) = R(\nabla u)(Rx)$ und damit:

$$\|u\|_{p^*} = \left(\int |u(x)|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} = R^{\frac{n}{p^*}} \|u_R\|_{p^*} \overset{!}{\leq} R^{\frac{n}{p^*}} C \left(\int |\nabla u_R|^p(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= R^{\frac{n}{p^*}+1} C \left(\int |\nabla u|^p(Rx) dx\right)^{\frac{1}{p}} = R^{\frac{n}{p^*}+1-\frac{n}{p}} C\|\nabla u\|_p$$

Folglich muss gelten: $\frac{n}{p^*} + 1 - \frac{n}{p} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^* = \frac{np}{n-p}$

Sobolev Ungleichung

Sei $1 \leq p < n$, $p* = \frac{np}{n-p}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
Dann gilt für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{p*,\Omega} \leq C\|\nabla u\|_{p,\Omega}$$

Dabei ist die Konstante $C \in \mathbb{R}$ nur von p, n und Ω abhängig.

Beweis

1.Schritt

Zeige die Behauptung für $p = 1$ und alle $u \in C_c^1(\Omega)$.

Betrachte dazu für ein u seine Fortsetzung auf $\mathbb{R}^n$.
Dann gilt nach dem HDI für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$u(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, t_i, \ldots x_n) dt_i$$

mit Hilfe der Dreiecksungleichung für Integrale folgt:

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, t_i, \ldots x_n)| dt_i \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, t_i, \ldots x_n)| dt_i$$

Also gilt:

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n)| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Integrieren nach x_1 auf beiden Seiten liefert:

$$\begin{aligned} \int |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int \prod_{i=1}^{n} \left(\int |\nabla u(x)| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \left(\int |\nabla u(x)| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int \prod_{i=2}^{n} \left(\int |\nabla u(x)| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \end{aligned}$$

Unter Verwendung der verallgemeinerten Hölderungleichung:

$$\|\prod_{i=1}^{n} f_j\|_r \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_j\|_{p_j} \qquad \text{falls } \frac{1}{r} = \sum \frac{1}{p_j},\ p_j \in [1, \infty]$$

gilt für den zweiten Faktor mit $p_j = n - 1$:

$$\int \prod_{i=2}^{n} \left(\int |\nabla u(x)| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \leq \prod_{i=2}^{n} \left(\int \int |\nabla u(x)| dx_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Integration beider Seiten nach x_2 führt dann mit erneuter Anwendung von Hölder zu:

$$\int\int |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2$$

$$\leq \int \left(\int |\nabla u(x)| dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int\int |\nabla u(x)| dx_i dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2$$

$$\leq \left(\int\int |\nabla u(x)| dx_1 dx_2\right)^{\frac{2}{n-1}} \left(\prod_{i=3}^{n} \int\int\int |\nabla u(x)| dx_i dx_1 dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Induktiv folgt mit Integration nach den verbleibenden $n-2$ Variablen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \prod_{n=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)| dx \right)^{\frac{1}{n-1}}$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)| dx \right)^{\frac{n}{n-1}}$$

Also gilt

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \|\nabla u\|_1$$

Damit gilt die gewünschte Ungleichung für $p = 1$ und Funktionen aus C_c^1.

2. Schritt

Zeige die Behauptung für ein beliebiges $1 < p < n$.

Betrachte dazu für eine beliebige Funktion $u \in C_c^1$ die Funktion $|u|^\gamma$, mit $\gamma = \frac{p^*(n-1)}{n} = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$.
$|u|^\gamma$ ist dann auch in C_c^1 und es gilt:

$$\|u\|_{p^*}^\gamma = \left(\int (|u(x)|^\gamma)^{\frac{n}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int |\nabla|u(x)|^\gamma| dx$$

$$= \gamma \int |u(x)|^{\gamma-1} |\nabla u(x)| dx \underset{\text{Hölder}}{\leq} \gamma \left(\int |u(x)|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla u\|_p$$

und folglich mit $\frac{(\gamma-1)p}{p-1} = p^*$:

$$\|u\|_{p^*} \leq \gamma \|\nabla u\|_p$$

3. Schritt

Zeige die Ungleichung für alle $u \in W_o^{1,p}(\Omega)$ mittels Dichtheit.

Es ist $\overline{C_c^\infty(\Omega)} = W_o^{1,p}(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Das heißt es gibt eine Folge $(u_k)_k \subset C_c^\infty(\Omega)$ die gegen u in $W_o^{1,p}(\Omega)$ konvergiert. Dann gilt $u_i - u_k \in C_c^1(\Omega)\ \forall i,k \in \mathbb{N}$, also nach Schritt 2:

$$\|u_k - u_i\|_{p^*} \leq C\|\nabla u_k - \nabla u_i\|_p \xrightarrow{k,i\to\infty} 0$$

also ist $(u_k)_k$ Cauchy-Folge in $L^{p^*}(\Omega)$.

Wegen $u_k \xrightarrow{\|\cdot\|_p} u$, gilt auch $u_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{p^*}} u$ und damit:

$$\|u\|_{p^*} = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{p^*} \leq C \lim_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|_p = C\|\nabla u\|_p$$

3. Schritt

Zeige die Ungleichung für alle $u \in W_o^{1,p}(\Omega)$ mittels Dichtheit.

Es ist $\overline{C_c^\infty(\Omega)} = W_o^{1,p}(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Das heißt es gibt eine Folge $(u_k)_k \subset C_c^\infty(\Omega)$ die gegen u in $W_o^{1,p}(\Omega)$ konvergiert. Dann gilt $u_i - u_k \in C_c^1(\Omega)\ \forall i, k \in \mathbb{N}$, also nach Schritt 2:

$$\|u_k - u_i\|_{p^*} \leq C\|\nabla u_k - \nabla u_i\|_p \xrightarrow{k,i\to\infty} 0$$

also ist $(u_k)_k$ Cauchy-Folge in $L^{p^*}(\Omega)$.

Wegen $u_k \xrightarrow{\|\cdot\|_p} u$, gilt auch $u_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{p^*}} u$ und damit:

$$\|u\|_{p^*} = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{p^*} \leq C \lim_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|_p = C\|\nabla u\|_p$$

Ungleichung für p>n

Sei $p > n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $|\Omega| < \infty$.
Dann gibt ein $C \in \mathbb{R}$ sodass für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt:
u ist stetig und erfüllt die Ungleichung

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C \|\nabla u\|_p$$

Beachte:

- u ist eine Äquivalenzklasse, das heißt u ist stetig nach Abänderung auf einer Nullmenge.
- C hängt nur von n, p und Ω ab.

Beweisskizze

1. Zeige die Ungleichung für Funktionen $u \in C_c^1(\Omega)$
2. Nutze das $C_c^1(\Omega)$ dicht in $W_0^{1,p}(\Omega)$ liegt.
   Das heißt, für jedes $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gibt es eine Folge $(u_k)_k$ die bezüglich der Sobolev-Norm gegen u konvergiert. Dann gilt:

$$\sup_{\Omega} |u_k - u_i| \leq \|\nabla u_k - \nabla u_i\|_p \xrightarrow{i,k\to\infty} 0$$

   Also ist $(u_k)_k$ Cauchyfolge in L^∞, also konvergent.
   Folglich ist die Grenzfunktion stetig und gleich u. Es gilt:

$$\|u\|_{\infty,\Omega} = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{\infty,\Omega} \leq \lim_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|_p = \|\nabla u\|_p$$

Korollar(Einbettungssatz von Sobolev)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt:

a) falls $1 \leq p < n$, $p^* = \frac{np}{n-p}$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$$

b) falls $p > n$, $|\Omega| < \infty$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$$

Korollar(Einbettungssatz von Sobolev)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt:

a) falls $1 \leq p < n$, $p^* = \frac{np}{n-p}$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$$

b) falls $p > n$, $|\Omega| < \infty$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$$