Integralsatz von Gauss und Greensche Formeln

Nicola Schweiger

LMU München

Haslach am 13.12.2012

Integralsatz von Gauss

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand ∂U. Der Rand sei orientiert durch eine äußere Normale ν .
Ferner sei $f = (f_1 ... f_n) \in C^0(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(U, \mathbb{R}^n)$
zugleich gilt: $\int\limits_U |\operatorname{div} f| dx < \infty$
dann gilt:

$$\int\limits_U \operatorname{div} f(x) dx = \int\limits_{\partial U} f(x) \cdot \nu(x) dS$$

Der Satz von Gauss stellt einen Zusammenhang zwischen der Divergenz eines Vektorfeldes f in einem beliebigen Volumen und dem Fluss des Feldes durch die Oberfläche des Volumens dar.

Theorie und Physik

- $\overrightarrow{f} = Vektorfeld$
- div $\overrightarrow{f}$ = Divergenz des Feldes (div $\overrightarrow{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$)
- $\overrightarrow{\nu}$ = Einheits-normalenvektor
- dV = kleines Volumenelement
- V = ganzes Volumen
- dS = kleines Oberflächenelement
- S = ganze Oberfläche

Satz: (Divergenzsatz) $\int_U \text{div}\, \overrightarrow{f}\, dV = \int_S \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS$
Vergleich mit Wasser:
Die Menge an Wasser, die in ein beliebiges Volumen gepumpt wird, ist gleich der Menge an Wasser die durch die Oberfläche des Volumens kommt

Beweis vom Integralsatz von Gauss

Wir betrachten beschränkte Gebiete $U \subset \mathbb{R}^n$ mit stückweise glattem Rand ∂U
es reicht zu zeigen:

$$\int\limits_U \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx = \int\limits_{\partial U} f_i \nu_i dS$$

(Gaußsche Formel 2.2.1)
da gilt:

$$\int\limits_U divfdx = \int\limits_U \sum\nolimits_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx = \sum\nolimits_{i=1}^n \int\limits_U \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx = \sum\nolimits_{i=1}^n \int\limits_{\partial U} f_i \nu_i dS = \int\limits_{\partial U} \sum\nolimits_{i=1}^n f_i \nu_i dS = \int\limits_{\partial U} f \cdot \nu dS$$

Beweis der Gaußschen Formel

Beweis der Formel für etwas leichtere Gebiete:
Wir betrachten ein Gebiet :

$$U = \{x; \Phi_i^-(x') < x_i < \Phi_i^+(x'), x' \in U_i\}$$

$\rightarrow$ U_i sind Gebiete aus $\mathbb{R}^{n-1}$ mit stückweise glattem Rand
$\rightarrow$ Φ_i^- , Φ_i^+ sind:
$\mapsto$ $\overline{U_i}$ stetige Funktionen
$\mapsto$ in U_i stückweise stetig differenzierbar
$\mapsto$ haben dort integrierbare erste Ableitungen
$\mapsto$ Ungleichung gilt: $\Phi_i^-(x) < \Phi_i^+(x)$ für $x \in U_i$
$\rightarrow$ $x' = (x_1....x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$

Einsetzen in die Gaußsche Formel liefert:

$$\int\limits_{U_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx = \int\limits_{U_i} \left(\int\limits_{\Phi_i^-(x')}^{\Phi_i^+(x')} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx' = \int\limits_{U_i} \left(f_i^+(x') - f_i^-(x') \right) dx'$$

$f_i^\pm : \mathbb{R}^{n-1} \supset U_i \longrightarrow \mathbb{R}$,
$f_i^\pm(x') = F(x_1, ..., x_{i-1}, ..\Phi_i^\pm(x'), x_{i+1}, ..., x_n)$
auf der anderen Seite liefert uns:

$$\int\limits_{U_i} \left(f_i^+ - f_i^- \right) dx' = \int\limits_{\partial U^+} \frac{1}{|N|} f dS - \int\limits_{\partial U^-} \frac{1}{|N|} f dS$$

$\rightarrow \partial U^+$: ist der von der Karte Φ_i^+ bedeckte obere Teil der Hyperfläche ∂U
$\rightarrow \partial U^-$: ist der von der Karte Φ_i^- bedeckte untere Teil der Hyperfläche ∂U

Da N die Außennormale darstellt, ist die $i-te$ Komponente von N:

$$N_i = N_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \partial U^+ \\ -1, & \text{wenn } x \in \partial U^- \end{cases}$$

dann ist die $i-te$ Komponente der äußeren Normale gegeben durch:

$$\nu_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{|N(x)|}, & \text{wenn } x \in \partial U^+ \\ -\frac{1}{|N(x)|}, & \text{wenn } x \in \partial U^- \end{cases}$$

und es gilt

$$\int\limits_{U_i} \left(f_i^+ - f_i^-\right) dx' = \int\limits_{\partial U^+} f_i \nu_i dS + \int\limits_{\partial U^-} f_i \nu_i dS = \int\limits_{\partial U} f_i \nu_i dS$$

Gradientensatz

Mit Hilfe der Gaußschen Formel zeige man den Gradientensatz:

$$\int_U \nabla f dx = \int_{\partial U} f \nu dS$$

Beweis:

$$\int_U \bigtriangledown f dx = \int_U \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^n e_i \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^n e_i \int_{\partial U} f \nu_i dS =$$

$$\int_{\partial U} \sum_{i=1}^n e_i \nu_i f dS = \int_{\partial U} f \cdot \nu dS$$

1. Greensche Formel

Wir betrachten ein beschränktes Gebiet U $\subset \mathbb{R}^n$ mit stückweise glattem Rand . Seien u,v reellwertige Funktionen $\in C^1(\overline{U})$ und $v \in C^2(U)$
Zusätzlich gilt: $\int\limits_U |\Delta v(x)| dx < \infty$
Dann gilt die erste Greensche Formel:

$$(1) \int\limits_U u(x)\Delta v(x) dx = \int\limits_{\partial U} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) dS - \int\limits_{\partial U} \nabla u(x) \nabla v(x) dS$$

Beweis der 1. Greenschen Formel durch Anwendung des Gaussschen Integralsatzes auf das Vektorfeld:

$$f = (u\frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., u\frac{\partial v}{\partial x_n}) = (u\nabla v)$$

Dann Gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_U div(u(x)\nabla v(x))dx &= \int\limits_U \nabla u(x)\nabla v(x) + u(x)\Delta v(x)dx \\
&= \int\limits_U \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int\limits_U u(x) + \Delta v(x)dx \\
&= \int\limits_{\partial U} u(x)\nabla v(x)\nu dS = \int\limits_{\partial U} u(x)\langle\frac{\partial v}{\partial x_i}, \nu\rangle dS \\
&= \int\limits_{\partial U} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x)dS
\end{aligned}$$

2. Greensche Formel

Wir betrachten ein beschränktes Gebiet U $\subset \mathbb{R}^n$ mit stückweise glattem Rand . Seien u,v reellwertige Funktionen $\in C^1(\overline{U})$ und $v \in C^2(U)$
Es gilt: $\int\limits_U |\Delta v(x)| dx < \infty$.
Zusätzlich ist $u \in C^2(U)$ und $\int\limits_U |\Delta u| dx < \infty$
Dann gilt die zweite Greensche Formel:

$$(2) \int\limits_U u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x) dx = \int\limits_{\partial U} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) - v(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS$$

Beweis der 2. Greenschen Formel

folgt aus der ersten Greenschen Formel:

$$\int_U u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)dx$$

$$= \int_U u(x)\Delta v(x)dx - \int_U v(x)\Delta u(x)dx$$

$$= \int_{\partial U} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x)dS - \int_U \nabla u(x)\nabla v(x)dx$$

$$- \left(\int_{\partial U} v(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)dS - \int_U \nabla v(x)\nabla u(x)dx \right)$$

$$= \int_{\partial U} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x)dS - \int_{\partial U} v(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)dS = \int_{\partial U} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) - v(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)dS$$