Maximumprinzip und Minimumprinzip

Daniela Rottenkolber

LMU München

Zillertal / 13.12.2012 – 16.12.2012

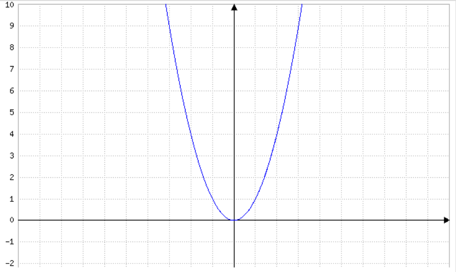
Übersicht

- Motivation mit Beispielen
- Schwaches Maximumprinzip
- Schwaches Minimumprinzip
- Starkes Maximumprinzip
- Starkes Minimumprinzip

Beispiel im Eindimensionalen

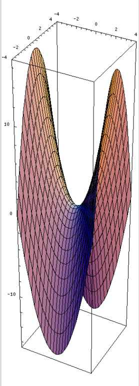
- $f : x \longmapsto x^2$
  $x \in]-R, R[\quad$ für ein $\quad R \in \mathbb{R}$
  $u''(x) = 2 > 0$
  $\Longrightarrow$ kein Maximum im Inneren
  $\Longrightarrow \max\limits_{I} f = \max\limits_{\partial I} f$

- $f : x \longmapsto -x^2$
  $x \in]-R, R[\quad$ für ein $R \in \mathbb{R}$
  $u''(x) = -2 < 0$
  $\Longrightarrow$ kein Minimum im Inneren
  $\Longrightarrow \min\limits_{I} f = \min\limits_{\partial I} f$



Beispiel im Zweidimensionalen

- $u : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2 \; auf \; B_r(M)$
  $\triangle u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 2 - 2 = 0$
  $\Longrightarrow$ kein Maximum und kein Minimum im Inneren
  $\Longrightarrow \max\limits_{B} u = \max\limits_{\partial B} u$
  $\Longrightarrow \min\limits_{B} u = \min\limits_{\partial B} u$



Das schwache Maximumprinzip

Es soll gelten :
$(i)\ \sum_{ij} |a^{ij}(x)|^2 \leq \Lambda^2$
$(ii)\ a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda \mid \xi^2 \mid \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$

und für das schwache Maximumprinzip:
$u \in W^{1,2}(\Omega)$
$Lu \leq 0\ auf\, \Omega$
$\Rightarrow \sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$

mit $Lu = -\Sigma_{ij} \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j} u)$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Beweis

$Annahme: \ u \ ist \ lipschitz \ stetig$
$Lu : C_0^\infty \mapsto \mathbb{R}$ *es soll gelten* $Lu \leq 0$, *also* $Lu = -\Sigma_{ij}\partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u) \leq 0$
Wir multiplizieren Lu *nun mit* $\varphi \in W_0^{1,2}$ *beliebig*,
$L(u,\varphi) = -\Sigma_{ij}\partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u)\varphi \leq 0$
$-\Sigma_{ij}\int_\Omega \partial x_i(a_{ij}\partial_{x_j}u)\varphi \, dx = \Sigma_{ij}\int_\Omega(a_{ij}\partial_{x_j}u)\partial_{x_i}\varphi \, dx \leq 0 \ \forall\varphi \ in \ W_0^{1,2}$
Setze $\varphi = max\{u-k,0\}$ *und* $k = \sup_{\delta\Omega} u^+$

$$\Rightarrow \partial_i\varphi = \begin{cases} \partial_i u \ wenn \ u > k \ (\varphi \neq 0) \\ 0 \ wenn \ u \leq k \ (\varphi = 0) \end{cases}$$

Beweis

$Annahme: \ u \ ist \ lipschitz \ stetig$
$Lu : C_0^\infty \mapsto \mathbb{R}$ *es soll gelten* $Lu \leq 0$, *also* $Lu = -\Sigma_{ij}\partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u) \leq 0$
Wir multiplizieren Lu *nun mit* $\varphi \in W_0^{1,2}$ *beliebig*,
$L(u,\varphi) = -\Sigma_{ij}\partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u)\varphi \leq 0$
$-\Sigma_{ij}\int_\Omega \partial x_i(a_{ij}\partial_{x_j}u)\varphi \, dx = \Sigma_{ij}\int_\Omega (a_{ij}\partial_{x_j}u)\partial_{x_i}\varphi \, dx \leq 0 \ \forall \varphi \ in \ W_0^{1,2}$
Setze $\varphi = max\{u-k,0\}$ *und* $k = \sup_{\delta\Omega} u^+$

$$\Rightarrow \partial_i\varphi = \begin{cases} \partial_i u \ wenn \ u > k \ (\varphi \neq 0) \\ 0 \ wenn \ u \leq k \ (\varphi = 0) \end{cases}$$

Beweis

$Annahme: \ u \ ist \ lipschitz \ stetig$

$Lu : C_0^\infty \mapsto \mathbb{R} \ es \ soll \ gelten \ Lu \leq 0, \ also \ Lu = -\Sigma_{ij}\partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u) \leq 0$

$Wir \ multiplizieren \ Lu \ nun \ mit \ \varphi \in W_0^{1,2} \ beliebig,$

$L(u,\varphi) = -\Sigma_{ij}\partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u)\varphi \leq 0$

$-\Sigma_{ij}\int_\Omega \partial x_i(a_{ij}\partial_{x_j}u)\varphi \, dx = \Sigma_{ij}\int_\Omega (a_{ij}\partial_{x_j}u)\partial_{x_i}\varphi \, dx \leq 0 \ \forall \varphi \ in \ W_0^{1,2}$

Setze $\varphi = max\{u-k, 0\} \ und \ k = \sup_{\delta\Omega} u^+$

$$\Rightarrow \partial_i\varphi = \begin{cases} \partial_i u \ wenn \ u > k \ (\varphi \neq 0) \\ 0 \ wenn \ u \leq k \ (\varphi = 0) \end{cases}$$

Beweis

$\Rightarrow \Sigma_{ij} \int_\Omega a_{ij}\partial_{x_j}u\partial_{x_i}\varphi \; dx = \Sigma_{ij} \int_{\Omega\cap\{u>k\}} a_{ij}\partial_{x_j}u\partial_{x_i}u \; dx \;\; \leq 0$

$0 \geq \Sigma_{ij} \int_{\Omega\cap\{u>k\}} a_{ij}\partial_{x_j}u\partial_{x_i}u \; dx \geq \lambda\Sigma_{ij} \int_{\{u>k\}} |\bigtriangledown u|^2 \geq 0$

$\Rightarrow |\bigtriangledown u| = 0$ *fast überall auf* $\{u > k\} \Rightarrow$ *kein Supremum auf* Ω

$\Rightarrow \sup\limits_{\Omega} u \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$

Beweis

$\Rightarrow \Sigma_{ij} \int_\Omega a_{ij}\partial_{x_j} u \partial_{x_i}\varphi \, dx = \Sigma_{ij} \int_{\Omega\cap\{u>k\}} a_{ij}\partial_{x_j} u \partial_{x_i} u \, dx \ \leq 0$

$0 \geq \Sigma_{ij} \int_{\Omega\cap\{u>k\}} a_{ij}\partial_{x_j} u \partial_{x_i} u \, dx \geq \lambda \Sigma_{ij} \int_{\{u>k\}} |\bigtriangledown u|^2 \geq 0$

$\Rightarrow |\bigtriangledown u| = 0$ *fast überall auf* $\{u > k\} \Rightarrow$ *kein Supremum auf* Ω

$\Rightarrow \sup\limits_{\Omega} u \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$

Beweis

$\Rightarrow \Sigma_{ij} \int_\Omega a_{ij}\partial_{x_j} u \partial_{x_i}\varphi \, dx = \Sigma_{ij} \int_{\Omega \cap \{u>k\}} a_{ij}\partial_{x_j} u \partial_{x_i} u \, dx \ \leq 0$

$0 \geq \Sigma_{ij} \int_{\Omega \cap \{u>k\}} a_{ij}\partial_{x_j} u \partial_{x_i} u \, dx \geq \lambda \Sigma_{ij} \int_{\{u>k\}} |\bigtriangledown u|^2 \geq 0$

$\Rightarrow |\bigtriangledown u| = 0$ *fast überall auf* $\{u > k\} \Rightarrow$ *kein Supremum auf* Ω

$\Rightarrow \sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$

Beweis

$$\Rightarrow \Sigma_{ij} \int_\Omega a_{ij}\partial_{x_j} u \partial_{x_i}\varphi \, dx = \Sigma_{ij} \int_{\Omega\cap\{u>k\}} a_{ij}\partial_{x_j} u \partial_{x_i} u \, dx \ \leq 0$$

$$0 \geq \Sigma_{ij} \int_{\Omega\cap\{u>k\}} a_{ij}\partial_{x_j} u \partial_{x_i} u \, dx \geq \lambda \Sigma_{ij} \int_{\{u>k\}} |\bigtriangledown u|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow |\bigtriangledown u| = 0 \textit{ fast überall auf } \{u > k\} \Rightarrow \textit{ kein Supremum auf } \Omega$$

$$\Rightarrow \sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$$

Das schwache Minimumprinzip

Es gelten die gleichen Voraussetzungen (i,ii)
wie im schwachen Maximumprinzip.
Außerdem soll gelten: $u \in W^{1,2}(\Omega)$
$Lu \geq 0 \; auf \; \Omega$
$\Rightarrow \inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-$

Beweis.

Wende das schwache Maximumprinzip auf $L(-u) = -Lu \leq 0$ *an,*
Wenn $- Lu \leq 0$

$$\Rightarrow \sup_{\Omega} -u \leq \sup_{\partial\Omega} (-u)^{+}$$

$$\Rightarrow -\inf_{\Omega} u \leq -\inf_{\partial\Omega} u^{-}$$

$$\Rightarrow \inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^{-}$$

□

Korollar der Eindeutigkeit:

Sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *und* $Lu = 0$ *auf* Ω
Dann gilt $u = 0$ *auf* Ω

Beweis.

$Lu = 0 \Rightarrow \sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u^+ \ \wedge \ \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u^-$
Aber da $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *sind die Randwerte gleich Null.*
$\Rightarrow u = 0$ *auf* Ω

$\square$

Das starke Maximumprinzip

Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie beim schwachen Maximumprinzip (i,ii)

Theorem

$Für\ das\ starke\ Maximumprinzip\ gilt\ nun:$
$u \in W^{1,2}(\Omega)\ und\ Lu \leq 0\ auf\ \Omega$
$Dann\ folgt\ aus: \sup_B u = \sup_\Omega u \geq 0$
$für\ einen\ Ball\ B \subset \Omega$
$\Rightarrow u\ muss\ in\ \Omega\ konstant\ sein$

Beweis.

Setze $B = B_R(y)$ *o.B.d.A. sei* $B_{4R}(y) \subset \Omega$.
Sei $M = \sup_B u$ *und wende die schwache Harnack Ungleichheit für die Sublösung* $v = (M-u)^+$ *an*
$\Rightarrow\ 0 \leq R^{-n} \int_{B_{2R}} (M-u)^+ dx \leq C \inf_B (M-u) = 0$
$u \equiv M$ *auf* B_R *und wir erhalten* $u \equiv M$ *auf* Ω

□

Das starke Minimumprinzip

Es gelten die gleichen Voraussetzungen (i, ii) wie im starken Maximumprinzip.
Es sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *und* $Lu \geq 0$ *auf* Ω
Dann folgt aus:
$\inf\limits_{B} u = \inf\limits_{\Omega} u \leq 0$ *für einen Ball* $B \subset \Omega$
$\Rightarrow$ *u muss auf* Ω *konstant sein*

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!