Heat Kernel

Luzia Beisiegel

13.12.2012

Eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

J. Fourier: *La theorie analytique de la chaleur* (1822).

Modell:

• Ein idealisierter Stab der Länge L sei gegeben.

• Die Funktion $u(t, \bullet) : [0, L] \to \mathbb{R}$ beischreibe die Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$.

• Die zeitliche Änderung des Temperaturinhalts eines Teilintervalls $[a, x]$ mit $0 < a < x < L$ ist proportianal zum negativen örtlichen Temperaturgradienten an den Endpunkten. D.h. für ein $\eta > 0$ gilt

$$\frac{d}{dt} \int_a^x u(t, \xi) d\xi = \eta(u_x(t, x) - u_x(t, a))$$

Leitet man diese Formel nach x ab, so ergibt sich die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung, nämlich:

$$u_t(t, x) = \eta u_{xx}(t, x) \text{ bzw. } u_t(t, x) - \eta u_{xx}(t, x) = 0$$

Mehrdimensionale Wärmeleitungsgleichung (WLG)

Die mehrdimensionale Wärmeleitungsgleichung (Heat Equation) ist definiert als:

(1) $u_t - \triangle u = 0$ (homogene WLG),

(2) $u_t - \triangle u = f$ (inhomogene WLG),

- $\forall t > 0,\ x \in B \subseteq \mathbb{R}^n$;
- $u : \overline{B} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $u := u(x, t)$;
- $\triangle u := \triangle_x u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$ mit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
- u ist unbekannt.
- Im inhomogenen Fall ist $f : B \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben.

Herleitung des Heat Kernel, die *fundamental solution*

Suche Lösung u, für die gilt $(x,t) \mapsto \lambda^{\alpha} u(\lambda^{\beta} x, \lambda t)$, $\lambda > 0$

- Setze $\lambda = t^{-1} \Longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{t^{\alpha}} u(\frac{x}{t^{\beta}}, 1)$
- Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist radialsymmetrisch, d .h. $v(y) = w(|y|)$ (3)
- $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall t > 0$, setze $u(x,t) := \frac{1}{t^{\alpha}} v(\frac{x}{t^{\beta}})$ (4)

$$\overset{(4)\to(1)}{\Longrightarrow} \quad \alpha \frac{1}{t^{\alpha+1}} v(\frac{x}{t^{\beta}}) + \frac{1}{t^{\alpha+1}} \beta \frac{x}{t^{\beta}} Dv(\frac{x}{t^{\beta}}) + \frac{1}{t^{\alpha+2\beta}} \triangle v(\frac{x}{t^{\beta}}) = 0$$

$$\overset{\beta:=\frac{1}{2}, y:=\frac{x}{t^{\beta}}}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{t^{\alpha+1}}(\alpha v + \frac{1}{2} y Dv + \triangle v) = 0 \Longleftrightarrow \alpha v + \frac{1}{2} y Dv + \triangle v = 0$$

$$\overset{(3), r:=|y|}{\Longrightarrow} \quad \alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0$$

$$\overset{\alpha=\frac{n}{2}}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{2}(r^n w)' + (r^{n-1} w')' = 0 \Longleftrightarrow r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = c$$

$lim_{r\to\infty} w, w' = 0$, also $c = 0 \Longrightarrow w' = -\frac{1}{2} r w \Rightarrow w = b e^{-\frac{r^2}{4}}$

Die *Fundamental Solution und Eigenschaften*

Definition (*Heat Kernel*)

Der *Heat Kernel* ist die Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\phi(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \text{ falls } t > 0 \\ 0, \text{ falls } t < 0 \end{cases}$$

Eigenschaften der Fundamental Solution (FS):

1. ϕ löst die Wärmeleitungsgleichung
2. ϕ ist unendlich oft differenzierbar
3. $\phi(x,t) > 0$, für $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$,
4. $\forall \delta > 0$ gilt $\lim\limits_{t \to 0} \int\limits_{|x| \geq \delta} \phi(x,t) dx = 0$
5. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x,t) = 1, \; t > 0$,

Beweis der Eigenschaften der Fundamental Solution

1. Es gilt:
   - $\frac{d}{dx_i}|x| = \frac{x_i}{|x|}$ und $\frac{d^2}{dx_i x_j}|x| = \frac{\delta_{i,j}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}$ für $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$
   - $\phi_t(x,t) = \phi(x,t)(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t})$
   - $\phi_x(x,t) = -\frac{|x|}{2t}\phi(x,t)$
   - $\phi_{xx}(x,t) = (\frac{|x^2|}{4t^2} - \frac{n}{2t})\phi(x,t)$

   $$\Longrightarrow \phi_t(x,t) - \triangle\phi(x,t) = (\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}) - (\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}))\phi(x,t) = 0$$
2. Klar!
3. Folgt sofort aus Definition.
4. Mit Variablentransformation $y := \frac{x^2}{4t}$ folgt

   $$\int\limits_{|x|\geq\delta} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{|y|\geq\frac{\delta}{2\sqrt{t}}} e^{-|y|^2} dy \to 0, t \to 0$$

Beweis der Eigenschaften der Fundamental Solution

5. (i)Es gilt: $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$
   (ii) Setze $z := \frac{x}{2\sqrt{t}}$
   $(iii) \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1)dx_1 ... \int\limits_{\mathbb{R}} f(x_n)dx_n = \prod_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x_i)dx_i$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x,t)dx = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \overset{(ii),(iii)}{=} \frac{(2\sqrt{t})^n}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-z_i^2} dz_i \overset{(i)}{=} 1$$

Aus 4. und 5. folgt: $\forall \delta >$ gilt $\lim\limits_{t \to 0} \int\limits_{|x|<\delta} \phi(x,t)dx = 1$

Theorem zum homogenen Anfangswertproblem

Theorem 1

Seien $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y,t)g(y)dy$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Dann gilt:

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,

(ii) $\partial_t u(x,t) - \triangle u(x,t) = 0 \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,

(iii) für alle $x^0 \in \mathbb{R}^n : u(x,t) \to g(x^0)$ für $x \to x^0$ und $t \to 0$

Beweis von Theorem 1

(i) Wegen 2. Eigenschaft der FS.

(ii) $u(x,t) := \int_{\mathbb{R}} \phi(x-y,t)g(y)dy = (g * \phi)(x,t)$. Mit Ableitungsregel für Faltungen gilt:

- $u_t(x,t) = (g * \phi_t)(x,t)$,
- $\triangle u(x,t) = (g * \triangle\phi)(x,t)$

$$\Rightarrow u_t(x,t) - \triangle u(x,t) = (g * \phi_t)(x,t) - (g * \triangle\phi)(x,t) = g * (\phi_t - \triangle\phi)(x,t) \overset{1.Eigenschaft}{=} 0$$

Beweis von Theorem 1 Fortsetzung

Um (iii) zu beweisen brauchen wir noch folgende Definition:

Definition Dirac-Distribution und Dirac-Folge

- Sei $\delta \in \mathbb{D}(\Omega)'$ - der Raum aller Distributionen auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen - gegeben durch

$$\delta_a(f) := < \delta_a, f > = \begin{cases} f(a), x = a \\ 0, \text{ sonst} \end{cases} \quad , \text{ mit } a \in \Omega$$

  Dann heißt δ Dirac-Distribution.

- Eine Folge $\delta_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt Dirac-Folge falls δ_k die 3.,4. und die 5. Eigenschaft (s. oben) erfüllt.

Neue Interpretation des Cauchyschen Anfangwertproblems

(iii) $u(x,t) = (g * \phi)(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)\phi(x-y,t)dy$

$\overset{t\to 0}{\to} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)\delta_0(x-y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)\delta_x(y)dy =$

$\overset{x\to x^0}{\to} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)\delta_{x^0}(y)dy = g(x^0)$

$\Longrightarrow u(x,t) \longrightarrow g(x^0)$ für $x \to x^0$, $t \to 0$

Neue Interpretation des Cauchyschen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \phi_t - \triangle\phi = 0, \text{ für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \{t > 0\} \\ \phi = \delta_0, \text{ für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Theorem zum inhomogenen Anfangswertproblem

Theorem 2

Sei $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C_c(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ und $u(x,t) := \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y, t-s) f(y,s) dyds$. Dann gilt:

(i) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$

(ii) $\partial_t u(x,t) - \triangle u(x,t) = f(x,t)$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$

(iii) $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n : u(x,t) \to 0,\ x \to x^0,\ t \to 0$

Beweis von Theorem 2 (skizzenhaft)

(i)
- f hat kompakten Träger,
- ϕ ist glatt in der Nähe von $s = t > 0$,
- Variablen-Transformation
- nach x und t entsprechend ableiten.

(ii) Man kann zeigen, dass $(\partial_t - \triangle)\phi = \delta_0$ gilt.

$$\Rightarrow u_t - \triangle u = f * (\phi_t - \triangle\phi)$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(y,s)(\partial_t - \triangle)\phi(x-y, t-s)dyds$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(y,s)\delta_{x,t}dyds = f(x,t)$$

(iii) $||u(\cdot,t)|| \leq t||f|| \to 0,\ t \to 0$, da

- $||\int_0^t h(x)dx|| \leq |t-0|||h||$
- $\phi(x-y, t-s) = \delta_{x,t}(y,s)$ für $0 < s < t \to 0$

Literatur

- L.C. Evans: Partial Differential Equations, Graduate studies in mathematics , vol. 9, 2end edition, 2010,
- M. Groves: Skript zu der Vorlesung Partielle Differentialgleichungen 1, WS08/09.
- A. M. Hinz: Fourier-Analysis. Vorlesungsskript, München, 2005.