Prof. Dr. L. Diening
Dipl. Math. S. Schwarzacher
Dipl. Math. C. Warmt

09.02.2011

Klausur

Numerik – WS 2010/11

Es ist erlaubt, eine selbst erstellte, einseitig per Hand beschriebene A4 Seite in der Klausur zu benutzen. Des weiteren ist die Verwendung eines Taschenrechners erlaubt. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt! Weiterhin müssen Sie die Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten Papier bearbeiten. Falls Ihnen das Papier dabei ausgehen sollte, so können Sie sich jederzeit weiteres Papier geben lassen. Legen Sie bitte während der Klausur Ihren Studentenausweis gut sichtbar neben sich auf den Tisch, damit wir Sie beim Kontrollieren möglichst wenig stören müssen.
Zum Bestehen der Klausur sind 14,5 Punkte notwendig. Bitte markieren Sie bitte die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben.

Dauer der Klausur: 8:15 bis 9:45 Uhr

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Da wir keine Aushänge mit Namen oder Matrikelnummern machen dürfen, notieren Sie sich bitte die folgende Zahl unter der wir Ihr Klausurergebnis veröffentlichen werden:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
max. Punkte	**2**	**2**	**3**	**4**	**3**	**3**	**3**	**4**	**2**	**4**	**3**	**3**
Punkte												

Σ Gesamt (max. 36)	

Viel Erfolg !

Aufgabe 1 **2 Punkte**

Geben Sie ein Beispiel für die Auslöschung bei der Subtraktion von Gleitkommazahlen an in $A(10, 3, 2)$, d.h. zur Basis 10 mit 3 Stellen für die Mantisse und 2 Stellen für den Exponenten.

Lösung zu Aufgabe 1

$0,112 - 0,111 = 0,001 \quad = 0,100 \cdot 10^{-2}$

Aufgabe 2 **2 Punkte**

Bestimmen Sie die relativen Konditionszahlen k_{ij} der Abbildung $f(x) := Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $x \in \mathbb{R}^2$.

Lösung zu Aufgabe 2

Die Konditionszahl ist

$$k_{ij} = \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{x_j}{f_i}\right|$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_l A_{il}x_l\Big) = \sum_l A_{il}\delta_{j,l} = A_{ij}$$

Daraus folgt

$$k_{ij} = \left|\frac{A_{ij}x_j}{(Ax)_i}\right|$$

Aufgabe 3 **3 Punkte**

Sei Q eine orthonormale Matrix, d.h. $Q^TQ = I$. Zeigen Sie, dass $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ für alle x, $\|Q\|_2 = 1$ und $\mathrm{cond}_2(Q) = 1$.

Lösung zu Aufgabe 3

Es gilt

$$\|Qx\|_2^2 = \langle Qx, Qx\rangle = \langle Q^TQx, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|_2^2.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\|Q\|_2 &= \sup_{\|x\|_2\leq 1} \|Qx\|_2 \\ &= \sup_{\|x\|_2\leq 1} \|x\|_2 = 1.\end{aligned}$$

Da $Q^TQ = I$ ist $Q^T = Q^{-1}$. Damit ist $I = QQ^{-1} = QQ^T = (Q^T)^TQ^T$. Also ist auch $Q^{-1} = Q^T$ orthogonal und damit $\|Q^{-1}\|_2 = 1$.
Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{cond}_2(Q) &= \|Q\|_2\|Q^{-1}\|_2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Bestimmen Sie $\|A\|_\infty$ und $\|A\|_2$. Bestimmen Sie $\mathrm{cond}_\infty(A)$ und $\mathrm{cond}_2(A)$.

Lösung zu Aufgabe 4

$$\|A\|_\infty = \max\{1 + |a|, |a| + 1\} = 1 + |a|$$

Es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{1 - a^2} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1 + |a|}{|1 - a^2|} = \frac{1}{|1 - |a||}$$

Es folgt

$$\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \frac{(1 + |a|)^2}{|1 - a^2|} = \frac{1 + |a|}{|1 - |a||}$$

Da A symmetrisch ist gilt

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

Analog gilt $\|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1})$.
Die Eigenwerte bestimmen wir mit

$$\det(\lambda - A) = (\lambda - 1)^2 - a^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - a^2.$$

Also $\sigma(A) = \{1 \pm -\sqrt{1 + (1 - a^2)}\} = \{1 \pm |a|\}$.
Daraus folgt $\rho(A) = 1 + |a|$, also

$$\|A\|_2 = 1 + |a|$$

Mittels der Formel für A^{-1} oder $\sigma(A^{-1}) = 1/\sigma(A)$ folgt

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{|1 - a^2|}(1 + |a|) = \frac{1}{|1 - |a||}$$

Daraus folgt

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{1 + |a|}{|1 - |a||}$$

Aufgabe 5 **3 Punkte**

Berechnen Sie mittels dividierter Differenzen das Interpolationspolynom, welches durch die Stützpunkte $(0, 1)$, $(1, 5)$ und $(2, 3)$ geht.

Lösung zu Aufgabe 5

Dividierte Differenzen

x_i	y_i		
0	1		
1	5	4	
2	3	-2	-3

Damit folgt

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + 4(x - 0) + (-3)(x - 0)(x - 1) \\ &= 1 + 7x - 3x^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 **3 Punkte**

Approximieren Sie das Integral

$$\int_0^1 2x^3 - 1\,dx$$

mit Hilfe der Mittelpunktregel und der Simpsonregel.

Lösung zu Aufgabe 6

Mittelpunktregel

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x^3 - 1\,dx &= (b-a)f((a+b)/2)\\ &= 1 \cdot f(1/2)\\ &= \frac{-3}{4}\end{aligned}$$

Simpsonregel

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x^3 - 1\,dx &= \frac{b-a}{6}\big(f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b)\big)\\ &= \frac{-1}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 7 **3 Punkte**

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung LL^T von A.

Lösung zu Aufgabe 7

Gaußverfahren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die LR-Zerlegung

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Cholesky-Zerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8 **4 Punkte**

Gegeben seien die Messpunkte

x_i	0	1	2	3
y_i	-1	1	5	5

Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade $y(x) = ax + c$.

Lösung zu Aufgabe 8

Das Ausgleichsproblem führt zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} =: b$$

Wir müssen lösen

$$A^T A \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} = A^T b$$

Die ist

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist

$$\begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 11/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8 \\ 2,2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9 **2 Punkte**

Sei $f(x) := \sqrt{1+x^2} - 2$ für $x \geq 0$. Geben Sie die konkrete Iterationsvorschrift für das Newtonverfahren an.

Lösung zu Aufgabe 9

Das Newton-Verfahren ist allgemein gegeben durch

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Aus

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

folgt

$$\begin{aligned} x_{n+1} &:= x_n - \frac{(\sqrt{1+x_n^2} - 2)\sqrt{1+x_n^2}}{x_n} \\ &= \frac{-1 + 2\sqrt{1+x_n^2}}{x_n}. \end{aligned}$$

Aufgabe 10 **4 Punkte**

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Problem $Ax = b$. Bestimmen Sie die Iterationsmatrizen des Jakobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens und ihre Spektralradien. Für welche a konvergieren jeweils die Verfahren.

Lösung zu Aufgabe 10

Wir zerlegen A in $A = L + D + R$ mit

$$L := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R := \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} J &= -D^{-1}(L+R) \\ &= -\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a/4 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\chi_J(\lambda) = \det(\lambda - J) = \lambda^2 - \frac{a^2}{4} = (\lambda + a/2)(\lambda - a/2).$$

Dies ergibt $\sigma(J) = \{\pm a/2\}$ und damit $\rho(J) = |a|/2$. Das Verfahren konvergiert für $|a| < 2$.

Es gilt

$$\begin{aligned} H &= -(L+D)^{-1}R \\ &= -\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -a/4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a/4 \\ 0 & a^2/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\chi_H(\lambda) = \det(\lambda - H) = (\lambda - a^2/4)\lambda.$$

Dies ergibt $\sigma(H) = \{a^2/4, 0\}$ und $\rho(H) = |a^2|/4$. Das Verfahren konvergiert für $|a| < 2$.

Aufgabe 11 **3 Punkte**

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben sie das Gradientenverfahren zur Lösung der linearen Gleichung an und berechnen sie den 1. Iterationsschritt.

Lösung zu Aufgabe 11

Das Residuum ist

$$g^0 := Ax^0 - b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$\alpha_0 := \frac{\langle g^0, g^0 \rangle}{\langle Ag^0, g^0 \rangle} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

und

$$x^1 := x^0 - \alpha_0 g^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12 **3 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit und symmetrisch und $b \in \mathbb{R}^n$. Sei

$$\mathcal{E}(x) := \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle x, b\rangle$$

für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass jedes Minimum von $\mathcal{E}$ die Gleichung $Ax = b$ erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 12

Es gilt

$$\begin{aligned}
(\delta\mathcal{E})(z)(y) &= \frac{d}{dt}\mathcal{E}(z+ty)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\big(t^2\langle Ay, y\rangle + t\langle Az, y\rangle + t\langle Ay, z\rangle + \langle z, z\rangle\big) - \langle z, b\rangle - t\langle y, b\rangle\Big)\mathcal{E}(z+ty)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}(\langle Az, y\rangle + \langle Ay, z\rangle) - \langle y, b\rangle \\
&= \langle Az, y\rangle - \langle y, b\rangle \qquad \text{da } A \text{ symmetrisch} \\
&= \langle Az - b, y\rangle
\end{aligned}$$

Das Minimum x erfüllt $(\delta\mathcal{E})(x)(y) = 0$ für alle y , d.h. $\langle Ax - b, y\rangle = 0$ für alle y . Damit folgt $Ax - b = 0$.