Glatte Approximation

Roland Tomasi

17.02.2012

Inhalt

Einleitung

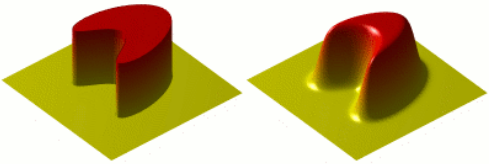

Abbildung: eine Funktion wird geglättet

Sobolev Funktionen sollen durch Folgen von glatten Funktionen approximiert werden:

- Faltung mit “glättendem Kern” ergibt glatte Approximationen (Glättungen)
- Glättungen sind kompatibel mit Ableitungsoperationen und erhalten wichtige Normen

glättende Kerne

Eine C^∞-Funktion $\eta : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ mit

- $\operatorname{supp} \eta \subseteq \overline{\mathrm{B}}_0(1)$
- $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\mathrm{d}x = 1$

heisst glättender Kern (engl: Mollifier).
Das Standardbeispiel für einen glättenden Kern ist

$$\eta(x) := \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & ; \text{für } |x| < 1 \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $c \in (0, \infty)$ so gewählt wird, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\mathrm{d}x = 1$.

Glättung/Regularisierung

Sei $\eta \in L^1_{loc}(\Omega)$, Ω offen. Sei $\eta \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ ein glättender Kern. Dann heisst die Faltung $u_\varepsilon := u * \eta_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^d$, gegeben durch

$$u_\varepsilon(x) := \int_\Omega \eta_\varepsilon(z-x)\, u(z)\mathrm{d}z = \int_{\mathrm{B}_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(z-x)\, u(z)\mathrm{d}z$$

die Glättung (oder Regularisierung) von u mit Radius $\varepsilon > 0$, wobei

- $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$
- $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$

Glättungssatz

Für alle $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Ist $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ und u besitzt eine γ-te schwache Ableitung, so gilt ferner:

$$\partial^\gamma u_\varepsilon = (\partial^\gamma u)_\varepsilon$$

auf Ω_ε.

Normerhaltung von Glättungen 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\omega \Subset \Omega$ und für $\varepsilon > 0$ sei

$$\omega^\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\omega) < \varepsilon\} \cup \omega$$

die äußere Parallelmenge zu ω im Abstand ε. Dann gilt:

- Ist $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit $p \in [1, \infty]$, so ist $u_\varepsilon \in L^p_{loc}(\Omega)$ und

  $$\|u_\varepsilon\|_{p;\omega} \leq \|u\|_{p;\omega^\varepsilon}$$

  falls $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass $\omega^\varepsilon \Subset \Omega$.
- Ist $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, so ist $u_\varepsilon \in W^{k,p}(\Omega_\varepsilon)$ und

  $$\|u_\varepsilon\|_{k,p;\Omega_\varepsilon} \leq \|u\|_{k,p;\Omega}$$

  .

Normerhaltung von Glättungen 2

- Ist $u \in C^k(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, so ist $u_\varepsilon \in C^k(\Omega_\varepsilon)$ und

$$\|u_\varepsilon\|_{C^k(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u\|_{C^k(\Omega)}$$

.

- Ist $u \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ für ein $\alpha \in (0,1]$, so ist $u_\varepsilon \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}_\varepsilon\right)$ mit kontrollierter Hölder-Konstante:

$$[u_\varepsilon]_{\alpha;\Omega_\varepsilon} \leq [u]_{\alpha;\Omega}$$

Konvergenz von Glättungen 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.

- Ist $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit einem $1 \leq p < \infty$, so gilt:

$$u_\varepsilon \overset{\varepsilon \downarrow 0}{\to} u \text{ in } L^p_{loc}(\Omega)$$

und für $p \in [1, \infty]$

$$u_\varepsilon \overset{\varepsilon \downarrow 0}{\to} u \text{ punktweise f.ü. in } \Omega$$

- Ist $u \in L^p(\Omega)$ mit einem $1 \leq p < \infty$, Ω beschränkt und bezeichnet $\overline{u}$ die Fortsetzung von u durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^d$, so gilt:

$$\overline{u}_\varepsilon \overset{\varepsilon \downarrow 0}{\to} u \text{ in } L^p(\Omega)$$

Konvergenz von Glättungen 2

- Ist $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$, so gilt:

  $$u_\varepsilon \stackrel{\varepsilon \downarrow 0}{\to} u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega)$$

  und für $p \in [1, \infty]$

  $$\partial^\gamma u_\varepsilon \stackrel{\varepsilon \downarrow 0}{\to} \partial^\gamma u$$

  punktweise f.ü. in Ω für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \leq k$
- Ist $u \in C^k(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt:

  $$\partial^\gamma u_\varepsilon \stackrel{\varepsilon \downarrow 0}{\to} \partial^\gamma u$$

  lokal gleichmäßig auf Ω für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \leq k$

Konvergenz von Glättungen 3

- Ist $u \in C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in (0,1]$, so bleiben die Hölder-Normen sämtlicher Ableitungen von u bis zur Ordnung k beschränkt, es liegt allerdings keine lokale Konvergenz in der $C^{k,\alpha}$-Norm vor.

Globale Approx. von Sobolev-Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:

- Zu jedem $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ gibt es eine Folge $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$u_m \xrightarrow{m} u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega)$$

- $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$, d.h. zu jedem $u \in W^{k,p}(\Omega)$ gibt es eine Folge $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ mit

$$u_m \xrightarrow{m} u \text{ in } W^{k,p}(\Omega)$$

Vervollständigung lin. Räume 1

Normierte Vektorräume $(X, \|.\|)$ lassen sich in einer der Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ analogen Weise zu Banach-Räumen vervollständigen:

- Bilde die Menge $\tilde{X}$ der Cauchy-Folgen aus X
- Definiere Aquivalenzklassen: zwei Cauchy-Folgen werden identifiziert, wenn deren Differenzfolge verschwindet
- Bette die Äquivalenzklassen aus $\tilde{X}$ in X ein, indem $x \in X$ die Äquivalenzklasse von $(x, x, x, \ldots)$ zugeordnet wird
- $\tilde{X}$ wird durch die Definition der Norm $\|(x_n)\| := \lim_n \|x_n\|$ zum normierten Vektorraum

Vervollständigung lin. Räume 2

Der auf diese Weise aus X konstruierte normierte Vektorraum $\tilde{X}$ hat insb. folgende Eigenschaften:

- X liegt dicht in $\tilde{X}$
- $\tilde{X}$ ist Banach-Raum bzgl. der bei der Konstruktion definierten Norm
- Ist Y ein Banach-Raum in den X als dichte Teilmenge eingebettet werden kann, so ist Y isometrisch isomorph zu $\tilde{X}$

Der Banach-Raum $\tilde{X}$ ist also bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heisst Vervollständigung des Raumes X.

Meyers-Serrin, $H^{k,p}$

Offensichtlich gilt $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) \neq W^{k,p}(\Omega)$. Wir können aber die Vervollständigung $H^{k,p}(\Omega)$ von $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ betrachten:

- Nach Konstruktion ist $H^{k,p}(\Omega)$ Banach-Raum
- $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$
- Damit ist $H^{k,p}(\Omega)$ isometrisch isomorph zu $W^{k,p}(\Omega)$ (kurz: "$H = W$"). Dies ist der Satz von Meyers-Serrin (1964).

Dank + Diskussion

Bitte zögern Sie an dieser Stelle nicht Fragen zu stellen und Anregungen zu geben.
Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Bibliographie

Die Grafiken der Einleitung sind aus den Wikimedia-Commons und wurden durch ihren Autor zur freien, weltweiten Nutzung freigegeben.

Quellennachweis:

Dr. Dominic Breit: Grundlagen der Variationsrechnung II: Sobolev-Räume [2010]