Soboleverräume

Stephanie Neumeir

LMU Munich, Germany

München, 17.02.12

Dirichlet-Problem zur Poisson-Gleichung

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt mit genügend glattem Rand

Ges.: Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^\circ\left(\overline{\Omega}\right)$ des Randwertproblems

$$\Delta u = f \text{ auf } \Omega$$

$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

wobei $f \in C^\circ\left(\overline{\Omega}\right)$.

Wir wissen: u genügt $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta \mathrm{d}x = -\int_\Omega f \eta \mathrm{d}x \quad \forall \eta \in C_0^1(\Omega)$

Verschiedene Definitionen

i) $\Delta_\gamma^h u \xrightarrow{h \to 0} w_\gamma$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, wobei $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| < \text{dist}(\omega, \partial\Omega)$ und w_γ γ-te schwache Ableitung von u.

ii) $\gamma \in \{1, \ldots, d\}, \; u, w_\gamma \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$
w_γ γ-te schwache Ableitung von u, falls $\exists (u_n) \subset C^\infty(\Omega)$ mit $u_n \xrightarrow{n} u$ und $\partial_\gamma u_n \xrightarrow{n} w_\gamma$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$

Konzept der Distributionsableitung

$u \in C^1(\Omega)$, $w_\gamma \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $\gamma \in \{1, \dots, d\}$, sodass

$$\int_\Omega u \partial_\gamma \eta \mathrm{d}x = -\int_\Omega w_\gamma \eta \mathrm{d}x \quad \forall n \in C_0^\infty(\Omega)$$

Partielle Integration:

$$\int_\Omega u \partial_\gamma \eta \mathrm{d}x = \int_\Omega w_\gamma \eta \, \mathrm{d}x \quad \forall n \in C_0^\infty(\Omega)$$

Fundamentallemma der Integrationsrechnung:

$$w_\gamma = \partial_\gamma u$$

Definition: Schwache Differenzierbarkeit

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$, $k \in \mathbb{N}_0$, $u, w^\gamma \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$

w^γ heißt die γ-te schwache (partielle) Ableitung von u, falls

$$\int_\Omega u \partial^\gamma \eta \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega w^\gamma \eta \,\mathrm{d}x \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega)$$

u heißt k-mal schwach differenzierbar auf Ω, falls $\forall \gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \leq k$ ein $w^\gamma \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ existiert.

Raum: $W^k(\Omega)$

Definition: Sobolev-Raum

$\Omega \in \mathbb{R}^d$ offen, $1 < p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$. Der lineare Raum

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in W^k(\Omega) : \ \partial^\gamma u \in L^p(\Omega) \ \forall \gamma \in \mathbb{N}_0^k \text{ mit } |\gamma| \leq k\}$$

heißt Sobolev-Raum mit Differenzierbarkeitsstufe k und

Integrabilitätsexponent p.

Normen auf $W^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{k,p} := \|u\|_{\Omega,k,p} := \begin{cases} \left(\sum_{|\gamma| \le k} \|\partial^\gamma u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} & p < \infty \\ \max_{|\gamma| \le k} \|\partial^\gamma u\|_\infty & p = \infty \end{cases}$$

Definition:

Normalabschluss $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \le p \le \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$

$\mathring{W}^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}$

Satz:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \leq p \leq q \leq \infty,\ k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq l$. Dann gilt:

i) Die Einbettungen $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,p} \hookrightarrow L^p(\Omega)$ sind linear und stetig.

ii) Ist $\mathcal{L}^d(\Omega) < \infty$, so ist $W^{k,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$ stetig.

iii) Für $p < \infty$ liegt $W^{k,p}(\Omega)$ (bezüglich $\| \cdot \|_p$) dicht in $L^p(\Omega)$.

Satz:

$$D := \#\{\gamma \in \mathbb{N}_0^d : \ |\gamma| \leq k\} \text{ mit } k \in \mathbb{N}, \ 1 \leq p \leq \infty$$

$$\Phi : W^{k,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)^D \text{ mit } \Phi u := (\partial^\gamma u)_{|\gamma| \leq k}$$

Φ ist eine lineare Isometrie und der Unterraum $W^{k,p}(\Omega)$ ist abgeschlossen in $L^p(\Omega)^D$.

$$\left(\|u\|_{k,p} = \|\Phi u\|_p \quad \forall u \in W^{k,p}(\Omega) \right)$$

Beweis für $k = 1$:

$(u_m) \subset W^{1,p}(\Omega)$ Folge, s.d. $\Phi u_m = (u_m, \nabla u_m)$ konvergiert in $L^p(\Omega)^{1+d}$.

Also $u_m \overset{m}{\to}: u$ und $\nabla u_m \overset{m}{\to}: v$ mit $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^p(\Omega)^d$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega u \operatorname{div} \eta \, \mathrm{d}x &= \lim_m \int_\Omega u_m \operatorname{div} \eta \, \mathrm{d}x \\ &= -\lim_m \int_\Omega \nabla u_m \eta \, \mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega v \eta \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Korollar

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist $W^{k,p}(\Omega)$ ein Banachraum bezüglich der Norm $\| \cdot \|_{k,p}$.

$W^{k,2}(\Omega)$ und $\mathring{W}^{k,2}(\Omega)$ sind Hilberträume bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle u, v \rangle_k := \langle u, v \rangle_{W^{k,2}(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \int_\Omega \partial^\gamma u \partial^\gamma v \,\mathrm{d}x$$

Satz

Sei $k \in \mathbb{N}_0,\ 1 \leq p < \infty,\ u_m, u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann sind äquivalent:

i) $u_m \stackrel{m}{\to} u$ in $W^{k,p}(\Omega)$

ii) $\forall \varphi \in L^{p'}$ gilt $\int_\Omega \partial^\gamma u_m \varphi \,\mathrm{d}x \stackrel{m}{\to} \int_\Omega \partial^\gamma u \varphi \,\mathrm{d}x$

Satz: Schwaches Auswahlprinzip in $W^{k,p}$

Sei $k \in \mathbb{N}_0,\ 1 < p < \infty$ und $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega)$ beschränkte Folge $(\sup_m \|u_m\|_{k,p} < \infty)$.

Dann existiert eine Teilfolge (u_{m_k}) von (u_m) und eine Funktion $u \in W^{k,p}(\Omega)$, sodass gilt:

$$u_{m_k} \xrightarrow{k} u \text{ in } W^{k,p}(\Omega)$$