Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 — Mathematik

Grundlagen der Variationsrechnung II: Sobolev-Räume

nach einer Vorlesung von

Dr. Dominic Breit

Sommersemester 2010.

Einleitung

Viele Fragestellungen aus Physik, Technik oder den Wirtschaftswissenschaften sowie innermathematischer Disziplinen (Geometrie, partielle Differentialgleichungen, Variationsrechnung etc.) führen auf unendlichdimensionale Extremwertaufgaben, bei denen es darum geht, in einer Klasse von möglichen „Zuständen“ jenen mit minimaler „Energie“ zu bestimmen, wobei die „Energie“ durch ein Funktional repräsentiert wird. Um nur ein einfaches Beispiel zu nennen, betrachte man das Problem ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$)

$$I[u] := \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \longrightarrow \min .$$

Physikalisch beschreibt dies u.a. das elektrische Potential $u :\to \mathbb{R}$ in einem ladungsfreien Raum (dabei repräsentiert obiges Integral die elektrische Energie). Mit der direkten Methode der Variationsrechnung lässt sich die Existenz einer eindeutigen distributionellen (verallgemeinerten) Lösung von Variationsproblemen dieser Form zeigen (bei Vorgabe von Randwerten). Hierbei handelt es sich um eine Sobolev-Funktion, die a priori im analytischen Sinn sehr schlecht Eigenschaften hat (es gibt Beispiele, die nirgends stetig sind). Um das Wohlverhalten solcher Lösungen zu studieren, sind tiefgreifende Kenntnisse über Sobolev-Funktionen notwendig. Aber auch für viele numerische Anwendungen sind solche Kenntnisse von großem Vorteil.
Die folgenden drei Problemstellungen stehen dabi im Vordergrund:

- Glatte Approximation von Sobolev-Funktionen:
  Sobolev-Funktionen können durch C^∞-Funktionen approximiert werden. Daher können Eigenschaften von Sobolev-Funktionen bewisen werden, indem man sie zunächst für glatte Funktionen verifiziert, approximiert und dann zur Grenze übergeht. Dies ist u.a. nützlich um Rechenregeln für Sobolev-Funktionen zu beweisen.

- Einbettungssätze:
  Sobolev-Funltionen weisen a priori höhere Integrabilitätseigenschaften auf (die von der Dimension des Raums abhängen): Beispielsweise gilt im Fall $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, dass u zum Raum $L^t(\Omega)$ für alle $t < \infty$ gehört (aus $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $p > 2$ folgt hier sogar Stetigkeit von u).

- Randverhalten:
  Für eine Funktion $u \in L^p(\Omega)$ können Randwerte nicht sinnvoll definiert werden, da $\partial\Omega$ eine Lebesgue-Nullmenge ist und L^p-Funktionen nur f.ü. eindeutig definiert sind. Beim Studium von Sobolev-Funktionen zeigt sich jedoch, dass dem Ausdruck $u_{|\partial\Omega}$ eine natürlich Bedeutung zukommt.

Nachdem obige Aussagen hergeleitet wurden, sind schließlich die Vorbereitungen getroffen um Regularitätstheorie zu betreiben. D.h. man geht der Frage nach, ob bzw. unter welchen Bedingungen verallgemeinerten Lösungen (von Variationsproblemen oder partiellen Differentialgleichungen) — welche a priori noch nicht einmal stetig sind — tatsächlich bessere Eigenschaften haben, oder sogar klassische Lösungen produzieren.

Warnung.
Dieses Skript dient als ergänzendes Begleitmaterial zur Vorlesung. Es kann und soll den Besuch sowie eine Mitschrift der Vorlesung nicht ersetzen, und erhebt keinen Anspruch auf Fehlerfreiheit oder Vollständigkeit.

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Glättungen und Approximationssätze für Sobolev–Funktionen

Für viele Zwecke, wie beispielsweise den Beweis von Rechenregeln für Sobolev–Funktionen, ist es nützlich, Sobolev–Funktionen durch unendlich oft differenzierbare (also glatte) Funktionen zu approximieren. Wir werden hier ein sehr allgemeines Approximationsschema beschreiben und schließlich zu dem Ergebnis gelangen, dass für $p < \infty$ der Raum $W^{k,p}$ genau der Abschluß von C^∞ in $W^{k,p}$ ist. Dabei werden die Testfunktionen eine tragende Rolle spielen.

Definition 1.1 (Glättender Kern/Mollifier)
Eine C^∞–Funktion $\eta : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ mit $\operatorname{spt}\eta \subset \overline{B}_1(0)$ und $\int_{\mathbb{R}^d} \eta\, dx = 1$ heißt ein glättender Kern (oder Mollifier*) auf $\mathbb{R}^d$.*

Ein kanonisches Beispiel für einen glättenden Kern (sog. *Standard–Mollifier*) ist gegeben durch (vg. GdV Übung 2)

$$\eta(x) := \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & ; \quad |x| < 1 \\ 0 & ; \quad \text{sonst,} \end{cases} \tag{1.1}$$

wobei $c = c(d) \in (0,\infty)$ so gewählt ist, dass $\int_{\mathbb{R}^d} \eta\, dx = 1$ ausfällt.

Mittels einer *Faltung* wollen wir nun die *Glättung* einer L^1_{loc}–Funktion erklären.
Zur Erinnerung: Für Funktionen $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ und $v \in C^0_\circ(\mathbb{R}^d)$ ist die Faltung $u * v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$u * v(x) := \int_{\mathbb{R}^d} u(z)\, v(z-x)\, dz.$$

Nimmt man nun für u eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen) und für v die Funktion $\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

mit einem glättenden Kern $\eta \in C^\infty_\circ(\mathbb{R}^d)$ und einem $\varepsilon > 0$, so ist die Faltung $u * \eta_\varepsilon$ nur noch auf der Menge

$$\Omega_\varepsilon := \Big\{x \in \Omega;\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\Big\}$$

wohldefiniert, weil $\operatorname{spt} \eta_\varepsilon(\cdot - x) \subset \overline{B}_\varepsilon(x)$ ist und $B_\varepsilon(x) \Subset \Omega$ nur für Punkte $x \in \Omega_\varepsilon$ gilt. Die Menge Ω_ε bezeichnet man als *innere Parallelmenge* zu Ω im Abstand ε.

Definition 1.2 (Glättung/Regularisierung)
Seien $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\eta \in C^\infty_\circ(\mathbb{R}^d)$ ein glättender Kern auf $\mathbb{R}^d$. Dann heißt die Faltung $u_\varepsilon := u * \eta_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$u_\varepsilon(x) := \int_\Omega \eta_\varepsilon(z - x)\, u(z)\, dz = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(z - x)\, u(z)\, dz,$$

die Glättung (oder Regularisierung) von u mit Radius $\varepsilon > 0$.

Anschaulich ist die Faltung u_ε der Mittelwert von u über die Kugel $B_\varepsilon(x)$ versehen mit der Gewichtsfunktion η_ε. Nach dem Prinzip der Differentiation von parameterabhängigen Integralen ist eine Faltung $u * v$ stets so regulär, wie es der „bessere“ Faktor erlaubt. Speziell hat die Glättung u_ε die folgende Eigenschaft:

Lemma 1.3 (Glättung)
Für jede Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und jedes $\varepsilon > 0$ ist $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Ist ferner $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ und besitzt u eine γ–te schwache Ableitung, so gilt:

$$\partial^\gamma u_\varepsilon = \big(\partial^\gamma u\big)_\varepsilon \quad \textit{auf} \quad \Omega_\varepsilon.$$ [a]

Die Glättung — daher auch der Name — ist also eine auf Ω_ε glatte Funktion, und darf mit der schwachen Ableitung (sofern existent) vertauscht werden.

Beweis von Lemma 1.3.
Zunächst ist für jeden Multiindex $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$:

$$\partial^\gamma u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(z)\, \partial_x^\gamma\big(\eta_\varepsilon(z - x)\big)\, dz = (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega u(z)\, \big(\partial^\gamma \eta_\varepsilon\big)(z - x)\, dz, \quad (1.2)$$

worin das Integral auf der rechten Seite wohldefiniert ist für alle $x \in \Omega_\varepsilon$. Dies zeigt $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Nehmen wir nun an, dass u eine γ–te schwache Ableitung

[a] Ist $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, so ist natürlich $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und die Vertauschungsregel gilt auf $\mathbb{R}^d$.

besitzt. Dann ist nach Definition der schwachen Differenzierbarkeit

$$\int_\Omega u(z)\,\big(\partial^\gamma \eta_\varepsilon\big)(z-x)\,dz = (-1)^{|\gamma|}\int_\Omega \partial^\gamma u\,\eta_\varepsilon(z-x)\,dz = (-1)^{|\gamma|}\big(\partial^\gamma u\big)_\varepsilon,$$

woraus die behauptete Identität mit (1.2) folgt. □

Da wir mit Hilfe von Glättungen zu Approximationssätzen für $W^{k,p}$–Funktionen gelangen wollen, müssen wir wissen, wie sich die entsprechenden Normen beim Glätten verhalten. Wie sich herausstellt werden Normen bei Glättungsprozessen erhalten. Genauer:

Satz 1.4 (Normerhaltung beim Glätten)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\omega \Subset \Omega$ und für ein $\varepsilon > 0$ sei

$$\omega^\varepsilon := \Big\{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x,\omega) < \varepsilon\Big\}$$

die äußere Parallelmenge zu ω im Abstand ε. Dann gelten die folgenden Aussagen für Funktionen $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

i) Ist $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit $p \in [1,\infty]$, so ist auch $u_\varepsilon \in L^p_{loc}(\Omega)$ und

$$\|u_\varepsilon\|_{p;\,\omega} \le \|u\|_{p;\,\omega^\varepsilon},$$

falls $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass $\omega^\varepsilon \Subset \Omega$ ist.

ii) Ist $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1,\infty]$, so ist $u_\varepsilon \in W^{k,p}(\Omega_\varepsilon)$ und es gilt:

$$\|u_\varepsilon\|_{k,p;\,\Omega_\varepsilon} \le \|u\|_{k,p;\,\Omega}.$$

iii) Ist $u \in C^k(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, so ist $u_\varepsilon \in C^k(\Omega_\varepsilon)$ und es gilt:

$$\|u_\varepsilon\|_{C^k(\Omega_\varepsilon)} \le \|u\|_{C^k(\Omega)}.$$

iv) Ist $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ für ein $\alpha \in (0,1]$, so ist $u_\varepsilon \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ mit kontrollierter Hölder–Konstante, i. e.:

$$[u_\varepsilon]_{\alpha;\,\Omega_\varepsilon} \le [u]_{\alpha;\,\Omega}.$$

Beweis.

i) Sei $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$. Für $x \in \omega \Subset \Omega$ ist dann per Definition

$$\big|u_\varepsilon(x)\big| \leq \|u\|_{\infty;\,\omega^\varepsilon} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(z-x)\,dz,$$

worin das Integral auf der rechten Seite nach dem Transformationssatz und wegen $\int_{B_1(0)} \eta\,dx = 1$ den Wert 1 hat. Daraus folgt $\|u_\varepsilon\|_{\infty;\,\omega} \leq \|u\|_{\infty;\,\omega^\varepsilon}$, also $u_\varepsilon \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ für genügend kleines ε.
Für $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ist

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|_{1;\omega} &\leq \int_\omega \int_{\omega^\varepsilon} \eta_\varepsilon(z-x)\,\big|u(z)\big|\,dz\,dx \\ &= \int_{\omega^\varepsilon} \left(\int_{\omega \cap B_\varepsilon(z)} \eta_\varepsilon(z-x)\,dx \right) \big|u(z)\big|\,dz \leq \int_{\omega^\varepsilon} \big|u(z)\big|\,dz,\end{aligned}$$

woraus die Behauptung für $p=1$ folgt.
Sei schließlich $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$. Für ein fixiertes $x \in \omega \Subset \Omega$ definieren wir über Ω ein Maß $\mu_x : \wp(\Omega) \to [0,\infty]$ durch

$$\mu_x(A) := \big(\mathcal{L}^d \llcorner \eta_\varepsilon(\cdot - x)\big)(A) = \int_A \eta_\varepsilon(z-x)\,dz,$$

d. h. μ_x ist das mit $\eta_\varepsilon(\cdot - x)$ gewichtete Lebesgue–Maß [b]. Damit wird unter Verwendung der Hölder–Ungleichung

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|_{p;\omega} &= \int_\omega \left| \int_{\omega^\varepsilon} \eta_\varepsilon(z-x)\,u(z)\,dz \right|^p dx \\ &= \int_\omega \left| \int_{\omega^\varepsilon} u(z)\,d\mu_x(z) \right|^p \leq \int_\omega \left(\int_{\omega^\varepsilon} |u|^p\,d\mu_x \right) \mu_x(\omega^\varepsilon)^{p-1}\,dx \\ &\leq \int_\omega \left(\int_{\omega^\varepsilon} |u|^p\,\eta_\varepsilon(z-x)\,dz \right) dx,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $\mu_\varepsilon(\omega^\varepsilon) = 1$ benutzt haben. Man braucht jetzt nur noch gem. dem Satz von Fubini die Integrationsreihenfolge zu vertauschen, und erhält die Behauptung wie im Fall $p = 1$.

ii) Da die Glättung mit der schwachen Ableitung vertauscht werden kann, folgt dies aus i). (Ersetze dort ω durch Ω_ε; es ist $\big(\Omega_\varepsilon\big)^\varepsilon = \Omega$.)

iii) Analog zu ii).

[b] Für $\eta_\varepsilon \equiv 1$ wäre $\mu_x = \mathcal{L}^d$.

iv) Seien $x, y \in \Omega_\varepsilon$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} \big|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)\big| &= \left| \int_{B_\varepsilon(x)} u(z)\,\eta_\varepsilon(z-x)\,dz - \int_{B_\varepsilon(y)} u(z)\,\eta_\varepsilon(z-y)\,dz \right| \\ &= \left| \int_{B_\varepsilon(0)} u(z+x)\,\eta_\varepsilon(z)\,dz - \int_{B_\varepsilon(0)} u(z+y)\,\eta_\varepsilon(z)\,dz \right| \\ &\le \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z)\big|u(z+x) - u(z+y)\big|\,dz \le M\,|x-y|^\alpha, \end{aligned}$$

wobei $M \in [0, \infty)$ die Hölder–Konstante von u auf Ω bezeichnet. Daraus folgt die Behauptung. □

Der gerade bewiesene Satz besagt im wesentlichen, dass der lineare *Glättungsoperator* $G_\varepsilon : X(\Omega) \to X(\Omega_\varepsilon),\ u \mapsto u_\varepsilon$, der einen Raum von Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$ in den entsprechenden Raum von Funktionen $\Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ abbildet, für alle gängigen Räume $X = L^p, W^{k,p}, C^k, C^{k,\alpha}$ eine *schwache Kontraktion* ist, i. e.:

$$\big\|G_\varepsilon(u)\big\|_{X(\Omega_\varepsilon)} \le \|u\|_{X(\Omega)}.$$

Darüber hinaus ist $\operatorname{Bild} G_\varepsilon \subset X(\Omega_\varepsilon) \cap C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.
Zum Beweis von Approximationssätzen ist natürlich noch die Frage zu beantworten, ob $G_\varepsilon(u) = u_\varepsilon$ bei $\varepsilon \searrow 0$ auch in der Norm des Raums $X(\Omega_{\varepsilon_0})$ gegen $u|_{\Omega_{\varepsilon_0}}$ konvergiert, d. h.: Man fixiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und untersucht, ob $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\searrow 0} u$ auf Ω_{ε_0} in der $X(\Omega_{\varepsilon_0})$–Norm strebt bzw. lokale Konvergenz auf kompakten Teilmengen vorliegt. Diese Frage ist positiv zu beantworten, abgesehen von dem Fall, dass sich die Norm aus L^∞–Normen zusammensetzt. Ist nämlich $X(\Omega) = L^\infty(\Omega)$, so strebt i. a. u_ε bei $\varepsilon \searrow 0$ nicht gleichmäßig auf Ω gegen u, da sonst u zwangsläufig stetig sein müsste. Entsprechendes gilt für die Räume $W^{k,\infty}$. Der folgende Satz beschreibt das Konvergenzverhalten des Glättungsoperators genauer.

Satz 1.5 (Konvergenz von Glättungen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.

i) Ist $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit einem $1 \le p < \infty$, so gilt:

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\searrow 0} u \text{ in } L^p_{loc}(\Omega).$$

Ist $u \in L^p(\Omega)$ mit einem $1 \le p < \infty$, Ω beschränkt und bezeichnet $\bar{u}$ die Fortsetzung von u durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^n$, so gilt:

$$\bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\searrow 0} u \text{ in } L^p(\Omega).$$

Ferner gilt für jedes $p \in [1, \infty]$ *und* $u \in L^p_{loc}(\Omega)$*:*

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \text{ punktweise f. ü. in } \Omega$$

nach Wahl eines Vertreters.

ii) Ist $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ *mit* $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $1 \leq p < \infty$*, so gilt:*

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega).$$

Ferner gilt für jedes $p \in [1, \infty]$ *und* $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$*:*

$$\partial^\gamma u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \partial^\gamma u \text{ punktweise f. ü. in } \Omega$$

für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ *mit* $|\gamma| \leq k$ *nach Wahl von Vertretern.*

iii) Ist $u \in C^k(\Omega)$ *für ein* $k \in \mathbb{N}_0$*, so gilt:*

$$\partial^\gamma u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \partial^\gamma u$$

lokal gleichmäßig auf Ω *für alle* $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ *mit* $|\gamma| \leq k$*.*

iv) Ist $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *mit* $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $\alpha \in (0, 1]$*, so bleiben die Hölder–Normen sämtlicher Ableitungen von* u *bis zur Ordnung* k *beschränkt, es liegt allerdings keine lokale Konvergenz in der* $C^{k,\alpha}$*–Norm vor.*

Beweis.

iii) Wir zeigen die Aussage für ein $u \in C^0(\Omega)$ und überlassen dem Leser die einfachen Folgerungen für $u \in C^k(\Omega)$. Wir fixieren $\omega \Subset \omega_0 \Subset \Omega$. Dann ist $\omega^\varepsilon \subset \omega_0$ für alle $0 < \varepsilon \ll 1$ und wir erhalten für jedes $x \in \omega$

$$\begin{aligned} \big|u_\varepsilon(x) - u(x)\big| &= \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(z - x)\big(u(z) - u(x)\big)\, dz \right| \\ &\leq \sup_{\substack{y,z \in \overline{\omega_0} \\ |y-z| \leq \varepsilon}} \big|u(y) - u(z)\big|, \end{aligned} \tag{1.3}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(z - x)\, dz = 1$ ist. Da u als stetige Funktion auf dem Kompaktum $\overline{\omega_0}$ gleichmäßig stetig ist, verschwindet die rechte Seite von (1.3) bei $\varepsilon \searrow 0$.

i) Seien $\omega \Subset \Omega$ und $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $\omega_0 := \omega^{\varepsilon_0} \Subset \Omega$ ist. Dann wird für jedes

$u \in L^p_{loc}(\Omega)$ und $v \in C^0(\omega_0)$

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon - u\|_{p;\,\omega} &\leq \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{p;\,\omega} + \|v_\varepsilon - v\|_{p;\,\omega} + \|u - v\|_{p;\,\omega}\\ &\leq \|u - v\|_{p;\,\omega_0} + \|v_\varepsilon - v\|_{p;\,\omega} + \|u - v\|_{p;\,\omega}\end{aligned}$$

für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Da nun $C^0(\omega_0)$ dicht in $L^p(\omega_0)$ liegt für $p < \infty$ (vgl. GdV Satz 3.2.1), gibt es zu vorgegebenem $\delta > 0$ ein $v \in C^0(\omega_0)$, so dass $\|u - v\|_{p;\,\omega_0} < \frac{\delta}{3}$ ausfällt. Dann ist aber auch $\|u - v\|_{p;\,\omega} < \frac{\delta}{3}$ und gem. iii) hat man auch $\|v_\varepsilon - v\|_{p;\,\omega_0} < \frac{\delta}{3}$ für alle $\varepsilon < \varepsilon_1$ mit einem $\varepsilon_1 > 0$. Für alle $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ folgt daher mit der obigen Ungleichungskette $\|u_\varepsilon - u\|_{p;\,\omega} < \delta$, was wegen der Beliebigkeit von δ die erste Behauptung liefert.
Die $L^p(\Omega)$–Konvergenz für beschränkt Ω von $\bar{u}_\varepsilon$ gegen u ergibt sich nun aus der Konvergenz

$$\bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \bar{u} \text{ in } L^p_{loc}(\mathbb{R}^d).$$

Zum Beweis der punktweisen Konvergenz, die auch im Falle $p = \infty$ gilt, benutzt man den *Satz über Lebesgue–Punkte* (auch bekannt als *Differentiationssatz von Lebesgue*): Ist $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, so gilt für Vertreter von u (die wieder mit u bezeichnet seien)

$$\lim_{r \searrow 0} ⨍_{B_r(x)} \big|u(z) - u(x)\big|\, dz = 0 \quad \text{f. f. a. } x \in \Omega, \tag{1.4}$$

worin $⨍_A u\, dz := \big(\mathcal{L}^d(A)\big)^{-1} \int_A u\, dz$ den *Mittelwert* von u über der Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ bezeichnet (vgl. etwa [AFP], Cor. 2.23, [GMS], Vol. I, § 3.1.1 sowie [HS], Lem. 18.4). Die Punkte $x \in \Omega$, für die (1.4) gilt, heißen die *Lebesgue–Punkte* von u. Die Menge aller Lebesgue–Punkte von u heißt die *Lebesgue–Menge* für u. [c]
Ist nun $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit $p \in [1, \infty]$, so wird für fast alle $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}\big|u_\varepsilon(x) - u(x)\big| &\leq \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(z - x) \big|u(z) - u(x)\big|\, dz\\ &\leq \|\eta\|_\infty\, \varepsilon^{-d} \int_{B_\varepsilon(x)} \big|u(z) - u(x)\big|\, dz\\ &\leq \mathcal{L}^d(B_1)\, \|\eta\|_\infty ⨍_{B_\varepsilon(x)} \big|u(z) - u(x)\big|\, dz,\end{aligned}$$

worin die rechte Seite gem. (1.4) bei $\varepsilon \searrow 0$ verschwindet.

[c] Da für eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ $\mathcal{L}^d$–f. a. $x \in \Omega$ Lebesgue–Punkte von u sind, hat die Lebesgue–Menge $\Omega_0 \subset \Omega$ für u volles Maß, d. h. es ist $\mathcal{L}^d(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$.

ii) ergibt sich aus i).

iv) Dies ergibt sich mit der Aussage iv) aus Satz 1.4. Wir überlassen die Details dem Leser. □

Die Glättungen u_ε haben zwar gute Konvergenz– und Approximationseigenschaften, jedoch nur auf kompakten Teilgebieten. Der folgende Satz zeigt, dass man Sobolev–Funktionen global durch glatte Funktionen approximieren kann. Diese Aussage ist in der Literatur als *Satz von Meyers und Serrin* bekannt.

Satz 1.6 (Globale Approximation von Sobolev–Funktionen)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le p < \infty$. Dann gilt:

i) Zu jedem $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ gibt es eine Folge $(u_m) \subset C^\infty_\circ(\Omega)$ mit

$$u_m \xrightarrow{m} u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega).$$

ii) $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$, d. h. zu jedem $u \in W^{k,p}(\Omega)$ gibt es eine Folge $(u_m) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ mit

$$u_m \xrightarrow{m} u \text{ in } W^{k,p}(\Omega).$$ [d]

Bemerkung 1.7
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le p \le \infty$. Dann ist allgemein

$$C^k(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) \subsetneqq W^{k,p}(\Omega).$$

Es macht daher Sinn die Vervollständigung *$H^{k,p}(\Omega)$ von $C^k(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$ zu betrachten. Darunter versteht man folgenden abstrakten Begriff: Ist $\big(X, \|\cdot\|\big)$ ein linearer Raum, so sei $\tilde{X}$ die Menge aller Cauchy–Folgen von Elementen aus X, wobei man Cauchy–Folgen miteinander identifiziert, wenn deren Differenzfolge verschwindet (Bildung von Äquivalenzklassen). Der Raum X wird dann eingebettet in $\tilde{X}$, indem man jedem $x \in X$ die (Äquivalenzklasse) der konstanten Folge $(x, x, x, \dots)$ zuordnet. In der üblichen Weise macht man $\tilde{X}$ zu einem linearen Raum, auf dem man durch die Vorschrift*

$$\big\|(x_n)\big\| := \lim_n \|x_n\| \tag{1.5}$$

eine Norm einführt (dieser Grenzwert existiert für alle Folgen $(x_n) \in \tilde{X}$, weil dann $\|x_n\|$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$ ist). Einfache Überlegungen zeigen dann folgendes:

[d] Beachte, dass eine C^∞–Funktion i. a. nicht zu $W^{k,p}$ gehört, sondern nur zu $W^{k,p}_{loc}$.

i) *X liegt dicht in $\tilde{X}$.*

ii) *$\tilde{X}$ ist ein Banach–Raum bzgl. der Norm gem.* (1.5).

iii) *Ist Y ein Banach–Raum, in den X als dichte Teilmenge eingebettet werden kann, so ist bereits Y isometrisch isomorph zu $\tilde{X}$.*

Der (gem. iii) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) Banach–Raum $\tilde{X}$ heißt die Vervollständigung *des Raums X. (Vgl. dazu etwa [Yo], § I.10.)*
Nach Satz 1.6 ii) liegt $C^k(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$, und es folgt, dass die Vervollständigung $H^{k,p}(\Omega)$ von $C^k(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ isometrisch isomorph zu $W^{k,p}(\Omega)$ ist (Satz von Meyers und Serrin, kurz: „$H = W$“).

Beweis von Satz 1.6.

i) Sei (ω_m) eine kompakte Ausschöpfung von Ω (vgl. GdV vor Satz 6.15), so dass $\omega_m \Subset \omega_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. [e] Zu jedem m wählen wir nun eine *Abschneidefunktion* $\eta_m \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\eta_m \equiv 1$ in $\overline{\omega_m}$ und $\operatorname{spt} \eta_m \subset \omega_{m+1}$. [f] Nach dem zuvor gezeigten Satz 1.5 ii) gibt es eine Nullfolge $(\varepsilon_m) \subset (0,\infty)$ mit

$$\left\|u_{\varepsilon_m} - u\right\|_{k,p;\,\omega_m} \leq \frac{1}{m} \quad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Wir setzen nun

$$u_m := \begin{cases} \eta_m \, u_{\varepsilon_m} & \text{auf} \quad \omega_{m+1} \\ 0 & \text{auf} \quad \Omega \setminus \omega_{m+1} \end{cases}$$

und zeigen, dass diese Folge das Gewünschte leistet. Es ist $u_{\varepsilon_m} \in C^\infty\left(\Omega_{\varepsilon_m}\right)$ und wenn ε_m genügend klein ist (gehe ggf. zu einer Teilfolge über, die wieder mit ε_m bezeichnet sei), ist auch $\omega_{m+1} \Subset \Omega_{\varepsilon_m}$, so dass u_m eine C^∞–Funktion auf Ω mit Träger in $\overline{\omega}_{m+1}$ ist. Wir müssen also noch zeigen:

$$u_m \xrightarrow{m} u \text{ in } W^{k,p}(\omega) \quad \text{für alle} \quad \omega \Subset \Omega.$$

Zu fixiertem $\omega \Subset \Omega$ gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\omega \Subset \omega_{m_0}$. Dann ist natürlich auch $\omega \Subset \omega_m$ für alle $m > m_0$ und es folgt:

$$\|u_m - u\|_{k,p;\,\omega} \leq \|u_m - u\|_{k,p;\,\omega_m} = \left\|u_{\varepsilon_m} - u\right\|_{k,p;\,\omega_m} \leq \frac{1}{m},$$

und damit die Behauptung.

ii) Sei (ω_m) wie in i). wir betrachten jetzt für $m \in \mathbb{N}_0$ die „Ringgebiete“

$$A_m := \omega_{m+1} \setminus \overline{\omega}_{m-1} \quad \text{mit} \quad \omega_0 := \omega_{-1} := \emptyset.$$

Dann sind $A_0 = \omega_1$, $A_1 = \omega_2$ und die A_m sind offen und schöpfen Ω aus, d. h. es ist $\Omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} A_m$. Sei nun $(\eta_m) \subset C^\infty_\circ(\Omega)$ eine Zerlegung der

[e] Beispielsweise kann man $\omega_m := \left\{x \in \Omega \cap B_m(0);\, \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \frac{1}{m}\right\}$ wählen, wobei man ggf. erst ab einem genügend großen m zu zählen beginnt, um $\omega_m \neq \emptyset$ zu garantieren. Dabei ist der Durchschnitt $\Omega \cap B_m(0)$ nur bei unbeschränkten Gebieten Ω für die relative Kompaktheit der ω_m nötig. Ist Ω beschränkt, so kann man einfach $\omega_m := \Omega_{1/m}$ wählen.

[f] Eine solche Abschneidefunktion erhält man etwa durch Glättung der charakteristischen Funktion $\mathbb{1}_{\tilde{\omega}_m}$ mit einem sehr kleinen Radius, wobei $\omega_m \Subset \tilde{\omega}_m \Subset \omega_{m+1}$ ist.

Eins bzgl. (A_m), d. h. eine Folge (η_m) mit den Eigenschaften

$$0 \leq \eta_k \leq 1 \text{ in } \Omega \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

$$\text{Für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gibt es ein } m_k \in \mathbb{N} \text{ mit } \operatorname{spt} \eta_k \Subset A_{m_k}. \tag{1.7}$$

$$\sharp\big\{k \in \mathbb{N};\ \operatorname{spt} \eta_k \cap \omega \neq \emptyset\big\} < \infty \text{ für alle } \omega \Subset \Omega. \tag{1.8}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \eta_k \equiv 1 \text{ in } A_m. \tag{1.9}$$

Wobei o. E. annehmen, dass $\operatorname{spt} \eta_m \subset A_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt (sonst gehe über zu einer Teilfolge von (η_m)). Wir konstruieren nun zu vorgegebenem $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ ein

$$v \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) \quad \text{mit} \quad \|u - v\|_{k,p} < \varepsilon. \tag{1.10}$$

Wie eine einfache Überlegung zeigt, ist $v_m := \eta_m\, u \in W^{k,p}(\Omega)$ und hat kompakten Träger in A_m. Daraus folgt, dass auch die Glättung $(v_m)_{\varepsilon_m}$ für genügend kleines ε_m kompakten Träger in A_m hat, also eine $C_\circ^\infty(\Omega)$–Funktion ist. Ferner gilt:

$$\big\|(v_m)_\delta - v_m\big\|_{k,p;\,\Omega} \xrightarrow{\delta \searrow 0} 0$$

nach Satz 1.5 (werte die Norm über einer einer offenen Menge ω mit $\operatorname{spt} v_m \subset \omega \Subset \Omega$ aus). Nach ggf. Übergang zu einer Teilfolge von (ε_m) (welche wieder mit (ε_m) bezeichnet sei) gilt daher:

$$\big\|(v_m)_{\varepsilon_m} - v_m\big\|_{k,p;\,\Omega} < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \quad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Wir sehen nun, dass $v := \sum_{m=0}^\infty (v_m)_{\varepsilon_m}$ ein Kandidat für die gesuchte Funktion v ist: Bei vorgegebenem $\omega \Subset \Omega$ gibt es wegen der Eigenschaft (1.8) der Zerlegung (η_m) nur endlich viele $m \in \mathbb{N}$ mit $\omega \cap \operatorname{spt}(v_m)_{\varepsilon_m} \neq \emptyset$, so dass speziell für jedes $x \in \Omega$ nur für endlich viele m $(v_m)_{\varepsilon_m} \neq 0$ ist. Damit ist v wohldefiniert und in $C^\infty(\Omega)$, da dies für jedes $(v_m)_{\varepsilon_m}$ der Fall ist. Bleibt (1.10) nachzuweisen.[g] Dazu benutzt man folgenden Trick: Sei $\omega \Subset \Omega$ fixiert. Dann ist aufgrund der Eigenschaft (1.9) von (η_m) und wegen (1.11)

$$\|u - v\|_{k,p;\,\omega} = \left\| \sum_{m=0}^\infty (v_m)_{\varepsilon_m} - v_m \right\|_{k,p;\,\omega} \leq \sum_{m=0}^\infty \big\|(v_m)_{\varepsilon_m} - v_m\big\|_{k,p}$$

[g] Beachte, dass $v \in C^\infty(\Omega)$ lediglich $v \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ impliziert.

$$< \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} = \varepsilon,$$

so dass also für Multiindizes $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ gilt:

$$\sum_{|\gamma| \le k} \int_{\omega} \left|\partial^{\gamma}(u-v)\right|^p dx < \varepsilon^p.$$

Andererseits ist nach dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \left|\partial^{\gamma}(u-v)\right|^p dx &\le \liminf_m \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\omega_m} \left|\partial^{\gamma}(u-v)\right|^p dx \\ &= \liminf_m \int_{\omega_m} \left|\partial^{\gamma}(u-v)\right|^p dx,\end{aligned}$$

und somit auch

$$\sum_{|\gamma| \le k} \int_{\Omega} \left|\partial^{\gamma}(u-v)\right|^p dx < \varepsilon^p,$$

was $u - v \in W^{k,p}(\Omega)$ bedeutet. Daraus folgt (1.10), wie gewünscht. □

Lemma 1.14
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in W^1(\Omega)$. Dann gilt: Ist $\omega \subset \Omega$ ein Gebiet (also offen und zusammenhängend) und ist $\nabla u = 0$ f. ü. in ω, so ist u f. ü. in ω konstant.

Beweis.
Seien $B \Subset \omega$ eine Kugel und $\varepsilon > 0$ so klein, dass auch $B^{\varepsilon} \Subset \omega$ ist. Dann gilt für die Glättung $(\nabla u)_{\varepsilon}$ von ∇u nach Lemma 1.3:

$$\nabla u_{\varepsilon}(x) = \int_{B^{\varepsilon}} \eta_{\varepsilon}(z-x)\, \nabla u(z)\, dz = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in B,$$

so dass $u_{\varepsilon} \equiv c_{\varepsilon}$ in B mit einer Konstante $c_{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ sein muss, denn u_{ε} ist ja gem. Lemma 1.3 eine auf B glatte Funktion. Andererseits strebt $u_{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u$ in $L^1(B)$ (Satz 1.5), so dass

$$\int_B |c_{\varepsilon} - u|\, dx \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0$$

strebt. Damit strebt aber offenbar auch

$$c_{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \fint_B u\, dz.$$

Beides zusammen ergibt:

$$\int_B \left| u - \fint_B u\,dz \right| dx \leq \int_B |u - c_\varepsilon|\,dx + \mathcal{L}^d(B) \left| c_\varepsilon - \fint_B u\,dz \right| \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0,$$

und damit $u \equiv \fint_B u\,dz =: c_B \in \mathbb{R}$ auf B. Wir nehmen nun an, u sei nicht konstant auf ω. Dann gibt es Kugeln $B_{1,2} \Subset \omega$, so dass $c_{B_1} \neq c_{B_2}$ ist. Da ω zusammenhängend ist, gibt es eine Kurve γ, welche die Zentren der Kugeln B_1 und B_2 verbindet (z. B. einen geeigneten Streckenzug). Da ω offen ist, kann man die Spur von γ mit sich überlappenden Kugeln $B_k \Subset \omega$ überdecken. Sukzessive ergibt sich dann $c_{B_k} \equiv const$, im Widerspruch zur Annahme. (Sind nämlich B und B' sich überlappende Kugeln, welche kompakt in ω enthalten sind, so muss nach dem oben Gezeigten $u \equiv c_B$ auf B sowie $u \equiv c_{B'}$ auf B' gelten. Auf $B \cap B' \neq \emptyset$ gilt daher $u \equiv c_B = c_{B'}$, also $c_B = c_{B'}$.) $\square$

§ 2. Das Rechnen mit Sobolev–Funktionen

In diesem Kapitel wird der Kalkül für Sobolev–Funktionen entwickelt. Zunächst ist die Summe von $W^k(\Omega)$–Funktionen offenbar selbst wieder eine $W^k(\Omega)$–Funktion und es gilt (nach dem Fundamentallemma) fast überall in Ω die übliche Summenformel für Ableitungen (in der Definition der schwachen Ableitung sind dazu die entsprechenden Integrale einfach zu addieren). Entsprechend ist die Summe von $W^{k,p}(\Omega)$–Funktionen wieder eine $W^{k,p}(\Omega)$–Funktion.
Für Produkte oder Verkettungen von W^1–Funktionen ist es dagegen nicht ohne weiteres einsehbar, ob die entsprechende Verknüpfung wieder schwach differenzierbar ist und die erwartete Formel gilt. Sind etwa $u \in W^1(\Omega)$ und $v \in C^1(\Omega)$, so lässt sich relativ leicht zeigen, dass auch $uv \in W^1(\Omega)$ ist mit

$$\partial_\gamma(uv) = \partial_\gamma u\, v + u\, \partial_\gamma v \quad \text{f ü. in } \Omega.$$

Dies gilt auch für Funktionen $u, v \in W^1(\Omega)$, wobei man allerdings voraussetzen muss, dass $uv \in L^1_{loc}(\Omega)$ sowie $\partial_\gamma u\, v + u\, \partial_\gamma v \in L^1_{loc}(\Omega)$ sind. Auch der Beweis dieser Aussage ist relativ leicht, ungleich schwerer ist es dagegen, Kettenregeln für Sobolev–Funktionen zu beweisen; dafür sind i. a. stärkere Voraussetzungen an die äußere Funktion zu stellen, wie die folgende Kettenregel zeigt.

Satz 2.1 (Produktregel, Kettenregel)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen (und beschränkt [a]*), $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le p, q, r \le \infty$. Dann gilt:*

i) Sind $u \in W^{k,p}_{(loc)}(\Omega)$, $v \in W^{k,p'}(\Omega)$ mit $p' := p/(p-1)$ bzw. $= \infty$ für $p = 1$, so ist $uv \in W^{k,1}_{(loc)}(\Omega)$ und es gilt fast überall die übliche Formel von Leibniz:

$$\partial^\gamma(uv) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}_0^d \\ \nu \le \gamma}} \binom{\gamma}{\nu} \partial^\nu u\, \partial^{\gamma-\nu} v \quad \textit{f. ü. in } \Omega$$

für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \le k$. [b]

---

[a] Ist Ω unbeschränkt, so erhält man lediglich $uv \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ bzw. $\varphi \circ u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ unabhänig davon, ob u bzw. v global den entsprechenden Räumen angehören.

[b] Zur Erinnerung: Für Multiindizes $\gamma, \nu \in \mathbb{N}_0^d$ bedeutet $\nu \le \gamma$, dass $\nu_m \le \gamma_m$ für alle

ii) Seien $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ *mit* $\varphi' \in L^\infty(\mathbb{R})$ *und* $u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$. *Dann ist* $\varphi \circ u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$ *und es gilt:*

$$\partial_\gamma(\varphi \circ u) = \varphi'(u)\,\partial_\gamma u \quad \textit{f. ü. in } \Omega$$

und für alle $\gamma \in \{1, \ldots, d\}$.

Bemerkung 2.2

i) Ist $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ *mit beschränkter Ableitung (wie in Satz 2.1), so ist* φ *insbesondere Lipschitz–stetig.*[c] *Ist* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nur Lipschitz–stetig, so ist* φ *f. ü. klassisch differenzierbar (da* $\varphi \in AC(\mathbb{R})$ *ist, vgl. GdV Übung 6).*[d] *Eine Sobolev–Funktion* $u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$ *kann aber Teilmengen von* Ω *mit positivem Maß (d. h. Teilmengen, die keine Nullmengen sind) in Stellen abbilden, in denen* φ *nicht differenzierbar ist (man betrachte etwa* $u : B_1(0) \to \partial B_1(0)$, $x \mapsto \frac{x}{|x|}$*). Daher ist nicht klar, wie man* $\varphi'(u)$ *definieren soll, wenn* φ *lediglich Lipschitz–stetig ist.*

ii) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *wie in Satz 2.1,* $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^D)^N$ $(D, N \in \mathbb{N})$ *mit beschränkter Ableitung* $D\varphi$ *(d. h.* $D\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^D, \mathbb{R}^{N\times D})$*, also* φ *Lipschitz–stetig) und* $u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)^D$ *mit* $1 \le p \le \infty$. *Dann ist* $\varphi \circ u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)^N$ *mit*

$$\partial_\gamma(\varphi \circ u) = D\varphi(u)\,\partial_\gamma u \quad \textit{f. ü. in } \Omega \tag{2.1}$$

für alle $\gamma \in \{1, \ldots, d\}$. *Dies ergibt sich relativ leicht mit Hilfe von ii) aus Satz 2.1.*
Ist φ *nicht* C^1, *sondern lediglich Lipschitz–stetig, so ist zwar immer noch* $\varphi \circ u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)^N$, *aber die Formel* (2.1) *gilt nicht mehr f. ü. in* Ω *(vgl. i)). Immerhin kann man aber zeigen, dass dann*

$$\left|\partial_\gamma(\varphi \circ u)\right| \le \mathrm{Lip}(\varphi)\left|\partial_\gamma u\right| \quad \textit{f. ü. in } \Omega$$

$m \in \{1, \ldots, d\}$ ist. Entsprechend ist $\gamma - \nu$ komponentenweise erklärt. Es ist

$$\binom{\gamma}{\nu} := \frac{\gamma!}{\nu!\,(\gamma-\nu)!},$$

wobei $\nu! := \nu_1! \cdots \nu_d!$ ist.

[c] Zur Erinnerung: Lipschitz–Stetigkeit einer Funktion $\varphi : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^N$ $(D, N \in \mathbb{N})$ bedeutet, dass mit einer Konstante $L \in [0, \infty)$

$$\left|\varphi(P) - \varphi(Q)\right| \le L|P - Q| \quad \text{für alle} \quad P, Q \in \mathbb{R}^D$$

gilt. Die kleinstmögliche Konstante L mit dieser Eigenschaft heißt Lipschitz–Konstante von φ und wird mit $\mathrm{Lip}(\varphi)$ bezeichnet. (Offenbar ist $L = \mathrm{Lip}(\varphi) = 0$ genau dann, wenn φ konstant ist.)

[d] Diese Aussage gilt allgemeiner auch für Lipschitz–stetige Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^N$ und ist in der Literatur als *Satz von Rademacher* bekannt (vgl. etwa [EG], § 3.1.2).

für alle $\gamma \in \{1, \dots, d\}$ *gilt, wobei* $\mathrm{Lip}(\varphi) \in [0, \infty)$ *die Lipschitz–Konstante von* φ *bezeichnet. Dies ist wesentlich aufwendiger zu beweisen und erfordert tiefergehende maßtheoretische Kenntnisse (es sei etwa auf [BF], Lem. B.1 verwiesen; einen Beweis für den eindimensionalen Fall findet sich in [Mo].).*

iii) *Seien* $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^d$ *offen,* $\varphi : \Omega' \to \Omega$ *ein* C^k*–Diffeomorphismus* [e] $(k \in \mathbb{N})$ *und* $u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$ *mit* $1 \le p \le \infty$*. Dann ist* $u \circ \varphi \in W^{k,p}_{loc}(\Omega')$ *und es gelten die entsprechenden Formeln für* $\partial^\gamma(u \circ \varphi)$ *für* $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ *mit* $|\gamma| \le k$ *f. ü. auf* Ω'*. (Dabei ist zu beachten, dass die Verkettung* $u \circ \varphi$ *immer zur Klasse* $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ *gehört, auch wenn* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *ist.) Weiß man in dieser Situation, dass die Ableitungen* $D^l\varphi$ $(l \in \{1, \dots, k\})$ *sowie* $|\det D\varphi|^{-1}$ *beschränkt sind, so gilt:*

$$\|u \circ \varphi\|_{k,p;\,\Omega'} \le c\, \|u\|_{k,p;\,\Omega}$$

mit einer Konstanten $c = c(n, k, p, \varphi) > 0$.

Beweis von Satz 2.1.

i) Wir zeigen die Behauptung nur für $k = 1$ und überlassen dem Leser den Beweis für beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Ferner nehmen wir an, dass Ω beschränkt ist (sonst gehe man zu $\omega \Subset \Omega$ über und behandle alles lokal). Seien zunächst $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,p'}(\Omega)$ mit $p, p' < \infty$. Nach dem Satz von Meyers–Serrin (Satz 1.6 ii)) gibt es dann Folgen $(u_m) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ und $(v_m) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p'}(\Omega)$ mit

$$u_m \xrightarrow{m} u \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \quad \text{und} \quad v_m \xrightarrow{m} v \text{ in } W^{1,p'}(\Omega).$$

Leicht sieht man die folgenden Konvergenzen:

$$\begin{gathered} u_m v_m \xrightarrow{m} uv \text{ in } L^1(\Omega), \\ \partial_\gamma u_m\, v_m + u_m\, \partial_\gamma v_m \xrightarrow{m} \partial_\gamma u\, v + u\, \partial_\gamma v \text{ in } L^1(\Omega). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Hiermit folgt die schwache Differenzierbarkeit von uv und die Formel für $\partial_\gamma(uv)$.
Ist eine der Funktionen u oder v lokal von der Klasse $W^{1,p}$ bzw. $W^{1,p'}$ mit $p, p' < \infty$, so approximiere man u bzw. v (gem. Satz 1.6 i)) lokal in der entsprechenden Norm, und verfahre analog.
Bleibt der Fall $q = \infty$ bzw. $r = \infty$ zu behandeln: Sind etwa $u \in$

[e] Zur Erinnerung: Eine Abbildung $\varphi : \Omega' \to \Omega$ heißt ein C^k*–Diffeomorphismus*, falls $\varphi \in C^k(\Omega', \Omega)$ bijektiv ist mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1} \in C^k(\Omega, \Omega')$.

$W^{1,\infty}_{(loc)}(\Omega)$ und $u \in W^{1,1}_{(loc)}(\Omega)$, so approximiert man lediglich v in $W^{1,1}_{(loc)}(\Omega)$ durch glatte Funktionen (v_m), mit dem eben Gezeigten ist dann $\partial_\gamma(uv_m) \in W^1(\Omega)$ mit der ensprechenden Formel und bei $m \to \infty$ folgt wie zuvor die Behauptung wegen

$$\begin{aligned} uv_m &\xrightarrow{m} uv \text{ in } L^1(\Omega), \\ \partial_\gamma u\, v_m + u\,\partial_\gamma v_m &\xrightarrow{m} \partial_\gamma u\, v + u\,\partial_\gamma v \text{ in } L^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.3}$$

ii) Seien zunächst $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $p < \infty$ und φ Lipschitz–stetig mit Lipschitz–Konstante $L \in [0,\infty)$. Wieder nach Satz 1.6 ii) gibt es dann eine Folge $(u_m) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega)$ mit

$$u_m \xrightarrow{m} u \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \text{ und f. ü. in } \Omega,$$

und daher:

$$\int_\Omega \big|\varphi(u_m) - \varphi(u)\big|^p\,dx \le L^p \int_\Omega |u_m - u|^p\,dx \xrightarrow{m} 0.$$

Ferner ergibt sich für jedes $\gamma \in \{1,\dots,d\}$:

$$\int_\Omega \big|\varphi'(u_m)\,\partial_\gamma u_m - \varphi'(u)\,\partial_\gamma u\big|^p\,dx \le c\left\{\int_\Omega \big|\varphi'(u_m) - \varphi'(u)\big|^p\big|\partial_\gamma u\big|^p\,dx + \int_\Omega \big|\varphi'(u_m)\big|^p\big|\partial_\gamma u_m - \partial_\gamma u\big|^p\,dx\right\} =: c\big\{I_1 + I_2\big\}$$

mit einer Konstanten $c = c(p) > 0$.[f] Wegen der f. ü. punktweisen Konvergenz von (u_m) und der Stetigkeit von φ' strebt

$$\eta_m := \big|\varphi'(u_m) - \varphi'(u)\big|^p\big|\partial_\gamma u\big|^p \xrightarrow{m} 0.$$

Da außerdem $0 \le \eta_m \le \Big(2\sup_{t\in\mathbb{R}}\big|\varphi'(t)\big|\Big)^p |\nabla u|^p =: \eta$ f. ü. in Ω gilt, ist (η_m) beschränkt durch $\eta \in L^1(\Omega)$, so dass mit dem Satz von Lebesgue (majorisierte Konvergenz) folgt:

$$I_1 = \int_\Omega \eta_m\,dx \xrightarrow{m} 0.$$

[f] Allgemein gilt: $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ für alle $a, b \ge 0$ und $p \in [1,\infty)$ (siehe etwa [Ad], Lem. 2.24).

Für I_2 erhält man

$$I_2 \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\varphi'(t)\right|^p \|\partial_\gamma u_m - \partial_\gamma u\|_p^p \xrightarrow{m} 0,$$

womit die Behauptung im Fall $p < \infty$ bewiesen ist.
Den Fall $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ mit $p < \infty$ behandelt man analog wie unter i) beschrieben.
Bleibt der Fall $u \in W^{1,\infty}_{(loc)}(\Omega)$: Es ist dann $u \in W^{1,s}_{(loc)}(\Omega)$ für alle $s \in [1,\infty)$, nach dem gerade Gezeigten also $\varphi \circ u \in W^{1,s}_{(loc)}(\Omega)$ mit $\partial_\gamma(\varphi \circ u) = \varphi'(u)\,\partial_\gamma u$ f. ü. in Ω. Da aber $\varphi'(u)\,\partial_\gamma u$ sowie $\varphi \circ u$ zu $L^\infty_{(loc)}(\Omega)$ gehören, folgt $u \in W^{1,\infty}_{(loc)}(\Omega)$. □

Unser nächstes Ziel ist eine Verallgemeinerung der Kettenregel aus Satz 2.1. Wie in Bem. 2.2 bemerkt, gilt diese Kettenregel nicht mehr, wenn man die Bedingung $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ fallen lässt. Wir wollen nun aber zeigen, dass diese Kettenregel ihre Gültigkeit behält, wenn man verlangt, dass φ wenigstens stückweise von der Klasse C^1 ist. Dies ergibt sich mit Hilfe des folgenden Lemmas.

Lemma 2.3 (Kettenregel)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in W^1(\Omega)$ und $(\psi_m) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ eine Folge mit $\sup_m \|\psi_m\|_\infty < \infty$. Desweiteren sei für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Funktion φ_m eine Lebesgue–Stammfunktion zu ψ_m, i. e.:

$$\varphi_m(t) = \int_{[\min\{a,t\},\max\{a,t\}]} \psi_m(s)\,d\mathcal{L}^1(s)$$

für ein $a \in \mathbb{R}$, also $\varphi_m \in \mathrm{AC}(\mathbb{R})$.[g] *Gilt dann für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Kettenregel*

$$\partial_\gamma(\varphi_m \circ u) = \varphi_m'(u)\,\partial_\gamma u \text{ f. ü. in } \Omega \tag{2.4}$$

für ein $\gamma \in \{1,\ldots,d\}$ und strebt $\psi_m \xrightarrow{m}: \psi$ punktweise f. ü. in $\mathbb{R}$, so ist für eine Lebesgue–Stammfunktion φ zu ψ auch $\varphi \circ u \in W^1(\Omega)$ und erfüllt eine entsprechende Kettenregel:

$$\partial_\gamma(\varphi \circ u) = \varphi'(u)\,\partial_\gamma u \text{ f. ü. in } \Omega.$$

Beweis.
Ist $h \in L^\infty(\mathbb{R})$, so ist

$$H(t) := \int_{[\min\{0,t\},\max\{0,t\}]} h(s)\,d\mathcal{L}^1(s)$$

[g] Wir setzen nicht voraus, dass φ_m eine Regelfunktion ist, so dass φ_m nicht notwendig eine Stammfunktion im Riemannschen Sinn ist.

für jedes $t \in \mathbb{R}$ wohldefiniert und gehört zur Klasse $\mathrm{AC}(\mathbb{R})$, d. h. $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und f. ü. in $\mathbb{R}$ (im klassischen Sinn) differenzierbar mit $H'(t) = h(t)$ f. f. a. $t \in \mathbb{R}$. (H ist dann auch schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung erzeugt durch h.)
Wir setzen nun o. E.

$$\varphi_m(t) := \int_{[0,t]} \psi_m(s)\, d\mathcal{L}^1(s), \quad \varphi(t) := \int_{[0,t]} \psi(s)\, d\mathcal{L}^1(s).$$

Dann strebt $\varphi_m \xrightarrow{m} \varphi$ lokal gleichmäßig in $\mathbb{R}$: Betrachtet man etwa das Intervall $[0, a]$ mit einem $a > 0$, so ist für alle $t \in [0, a]$

$$\left|\varphi_m(t) - \varphi(t)\right| \leq \int_{[0,t]} \left|\psi_m(s) - \psi(s)\right| d\mathcal{L}^1(s),$$

worin die rechte Seite nach dem Satz von Lebesgue (majorisierte Konvergenz) wegen $|\psi_m - \psi| \leq 2 \sup_m \|\psi_m\|_\infty$ f. ü. in $[0, t]$ und $\psi_m \xrightarrow{m} \psi$ punktweise f. ü. in $[0, t]$ bei $m \to \infty$ verschwindet.
Wir zeigen nun $\varphi \circ u \in W^1(\Omega)$: Es strebt $\varphi_m \circ u \xrightarrow{m} \varphi \circ u$ punktweise f. ü. in Ω und es ist

$$\begin{aligned}\left|(\varphi_m \circ u)(x)\right| &\leq \left|(\varphi_m \circ u)(x) - \varphi_m(0)\right| + \left|\varphi_m(0)\right| \\ &= \left| \int_{[\min\{0,u(x)\},\max\{0,u(x)\}]} \psi_m(s)\, d\mathcal{L}^1(s) \right| \leq \left|u(x)\right| \|\psi_m\|_\infty\end{aligned}$$

f. f. a. $x \in \Omega$, so dass die Folge $(\varphi_m \circ u)$ wegen $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ lokal beschränkt ist. Nach dem Satz von Lebesgue, partieller Integration und (2.4) gilt daher für jedes $\eta \in C^\infty_\circ(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\varphi \circ u)\, \partial_\gamma \eta\, dx &= \lim_m \int_\Omega (\varphi_m \circ u)\, \partial_\gamma \eta\, dx \\ &= -\lim_m \int_\Omega \psi_m(u)\, \partial_\gamma u\, \eta\, dx = -\int_\Omega \psi(u)\, \partial_\gamma u\, \eta\, dx,\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Als Verallgemeinerung der Kettenregel aus Satz 2.1 ii) (vgl. auch Bem. 2.2 ii)) erhält man nun mittels Lemma 2.3:

Korollar 2.4 (Kettenregel)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz–stetig und stückweise von der Klasse C^1. Ist dann $u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$ mit $1 \leq p \leq \infty$, so ist auch $\varphi \circ u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$

und es gilt:

$$\partial_\gamma(\varphi \circ u) = \varphi'(u)\,\partial_\gamma u \quad \textit{f. ü. in } \Omega$$

für alle $\gamma \in \{1, \ldots, d\}$.

Als weitere Anwendung beweisen wir eine Umkehrung von Lemma 1.14:

Korollar 2.5
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen und* $u \in W^1(\Omega)$. *Dann gilt: Ist* $A \subset \Omega$ *eine meßbare Menge und* $u \equiv const$ *f. ü. in* A*, so ist* $\nabla u = 0$ *f. ü. in* A.

Die Aussage von Korollar 2.5 gilt natürlich insbesondere für jede C^1–Funktion, und ist ein im klassischen Kalkül ein bekannter Sachverhalt.

Bemerkung 2.3

- *Ist* φ' *nicht stetig sondern nur beschränkt, so ist nicht klar wieso* $\varphi' \circ g$ *überhaupt messbar ist. Einen Beweis hiervon findet man in [Fe]. Hierzu braucht man viel Maßtheorie. Dies gilt auch für den Beweis einer noch allgemeineren Variante der Kettenregel, die auf die stückweise Differenzierbarkeit verzichtet.*

- *Ist* φ *nicht differenzierbar, so stellt sich die Frage nach der Interpretation von* $\varphi'(u)\partial_\gamma u$. *Bei uns kann dies nur in einzelnen Punkten auftreten: ist* $\varphi'(a)$ *für ein* $a \in \mathbb{R}$ *nicht definiert und ist*

  $$\mathcal{L}^d \{x \in \Omega : u(x) = a\} \neq 0,$$

  so gilt $\partial_\gamma u = 0$ *auf* $[u = a]$. *Somit ist dann* $\varphi'(u)\partial_\gamma u = 0$.

Beweis von Korollar 2.4.
Ist φ Lipschitz-stetig, so gilt $\varphi \in AC(\mathbb{R})$ (vgl. GdV § 7), d.h.

$$\varphi(t) = \int_{[\min\{a,t\},\max\{a,t\}]} \psi(s)\, d\mathcal{L}^1(s)$$

für eine L^1_{loc}-Fkt $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Da φ Lipschitz-stetig ist, gilt weiterhin

$$\|\psi\|_\infty = \|\varphi'\|_\infty < \infty.$$

Wir glätten nun ψ mit Radius $1/m$ und erhalten aus Satz 1.4

$$\sup_m \|\psi_m\|_\infty \leq \|\psi\|_\infty < \infty.$$

Satz 2.1 ii) in Kombination mit Lemma 2.3 ergibt die Behauptung. □

Beweis von Korollar 2.5.
Sei $u \equiv a$ in f. ü. in A mit einem $a \in \mathbb{R}$. Wir setzen für $t \in \mathbb{R}$

$$\psi(t) := \begin{cases} 1 & ; \quad t = a \\ 0 & ; \quad t \neq a \end{cases} .$$

Eine Lebesgue–Stammfunktion zu ψ ist dann $\varphi \equiv 0$. Für $m \in \mathbb{N}$ sei nun ψ_m die Glättung von ψ mit Radius $\frac{1}{m}$, i. e.

$$\psi_m(t) := \int_{(a-1/m,a+1/m)} \eta_{1/m}(s-t)\,\psi(s)\,d\mathcal{L}^1(s)$$

mit einem glättenden Kern $\eta_{1/m}$ (vgl. § 1). Dann ist $\psi_m \in C^\infty_\circ(\mathbb{R})$ (nach Lem. 1.3) sowie $\sup_m \|\psi_m\| < \infty$ (nach Satz 1.4) und es strebt $\psi_m \overset{m}{\longrightarrow} \psi$ punktweise f. ü. in $\mathbb{R}$ (nach Satz 1.5), womit die Voraussetzungen von Lemma 2.4 erfüllt sind. Demnach ist für jedes $\gamma \in \{1,\dots,d\}$

$$0 = \partial_\gamma(\varphi \circ u) = \varphi'(u)\,\partial_\gamma u = \psi(u)\,\partial_\gamma u \text{ f. ü. in } \mathbb{R},$$

wegen $\psi(u) = 1$ f. ü. in A also $\partial_\gamma u = 0$ f. ü. in A. □

Bevor wir noch eine nützliche Konsequenz aus Lemma 2.3 ziehen, erinnern wir an folgende Notationen: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\square \in \{<, \leq, =, \geq, >\}$. Ist $c \in \mathbb{R}$, so schreiben wir

$$[u \,\square\, c] := \big\{x \in \Omega\,;\, u(x) \,\square\, c\big\}$$

und nennen $[u \,\square\, c]$ eine *Level–Menge* von u. Ferner setzen wir

$$u_- := \min\{u, 0\}, \quad u_+ := \max\{u, 0\}.$$

Offenbar ist $u_- = \mathbb{1}_{[u \leq 0]}\, u$ und $u_+ = \mathbb{1}_{[u \geq 0]}\, u$ und man überlegt sich leicht:

$$u = u_+ + u_- \quad \text{und} \quad |u| = u_+ - u_- \quad \text{auf } \Omega.$$

Korollar 2.6
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

i) Ist $u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$, so liegen auch die Funktionen $|u|, u_+, u_-, \max\{u, c\}$ in

$W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$ und es ist

$$\partial_\gamma |u| = \begin{cases} \partial_\gamma u & \text{auf} \quad [u > 0] \\ 0 & \text{auf} \quad [u = 0] \\ -\partial_\gamma u & \text{auf} \quad [u < 0] \end{cases}$$

sowie

$$\partial_\gamma \max\{u, c\} = \begin{cases} \partial_\gamma u & \text{auf} \quad [u > c] \\ 0 & \text{auf} \quad [u \le c] \end{cases}$$

für jedes $\gamma \in \{1, \dots, d\}$. Entsprechende Formeln gelten auch für u_-, u_+ und $\max\{u, v\} = u + (v - u)_+$.

ii) Ist Ω beschränkt und ist $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $p < \infty$ und

$$\lim_{\Omega \ni x \to \partial\Omega} \left|\partial^\gamma u(x)\right| = 0 \quad \text{für alle} \quad \gamma \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\gamma| \le k - 1$$

(für Vertreter) mit gleichmäßiger Konvergenz, so ist $u \in \mathring{W}^{k,p}(\Omega)$.

Beweis.
Die Funktionen $t \mapsto |t|$, $t \mapsto \max\{t, 0\}$ und $t \mapsto \min\{t, 0\}$ sind alle Lipschitz-stetig und stückweise C^1, die Behauptung folgt also mit Korollar 2.4.
ii) Sei $k = 1$ (die allgemeine Situation erschließt sich mittels vollständiger Induktion und sei ebenfalls dem Leser überlassen) und zunächst $u \ge 0$ angenommen. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist dann nach i)

$$w^\varepsilon := (u - \varepsilon)_+ \in W^{1,p}(\Omega)$$

und es gibt ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass $w^\varepsilon \equiv 0$ auf dem *Randstreifen*

$$\Sigma_\delta := \big\{x \in \Omega\,;\, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\big\} = \Omega \setminus \overline{\Omega}_\delta \tag{2.5}$$

ist. Wir betrachten nun die Glättungen

$$w^\varepsilon_\rho(x) := \int_{B_\rho(x)} \eta_\rho(z - x)\, w^\varepsilon(z)\, dz$$

von w mit Radien $\rho > 0$. Wegen (2.5) gibt es dann ein $\rho_0 = \rho_0(\delta) > 0$, so dass

$$\operatorname{spt} w^\varepsilon_\rho \subset \Omega_{\rho_0} \Subset \Omega \quad \text{für alle} \quad \rho < \rho_0,$$

und somit $w^\varepsilon_\rho \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ (gem. Lem. 1.3) für alle $\rho < \rho_0$ ist. Nach Satz 1.5 strebt nun

$$w^\varepsilon_\rho \xrightarrow{\rho \searrow 0} w^\varepsilon \text{ in } W^{1,p}(\Omega),$$

und da $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ abgeschlossen ist, muss $w^\varepsilon \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ sein. Man überlegt sich nun noch, dass auch

$$w^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \text{ in } W^{1,p}(\Omega)$$

gilt, woraus die Behauptung im Falle $u \geq 0$ folgt.
Für beliebiges u benutzt man die Zerlegung $u = u_+ - u_-$ und wendet das soeben Gezeigte auf u_+ und u_- an. □

Wir schließen diesen § mit einer Aussage über Differenzenquotienten von Sobolev–Funktionen. Damit steht uns ein praktikables Werkzeug zur Untersuchung der Zugehörigkeit einer $L^p_{(loc)}$–Funktion zu einem Sobolev–Raum zur Verfügung..

Satz 2.7 (Differenzenquotienten)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 < p < \infty$, $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ und $\gamma \in \{1, \ldots, d\}$. Dann sind äquivalent:

i) Die γ–te schwache Ableitung $\partial_\gamma u$ von u ist von der Klasse $L^p_{loc}(\Omega)$ (bzw. von der Klasse $L^p(\Omega)$).

ii) Für jedes $\omega \Subset \Omega$ gilt:

$$\|\Delta^h_\gamma u\|_{p;\,\omega} \leq c \quad \text{für alle} \quad h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } |h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$$

mit einer Konstante $c = c(\omega) > 0$ (bzw. mit einer von ω unabhängigen Konstante $c > 0$).

In diesem Fall gilt die Abschätzung:

$$\|\Delta^h_\gamma u\|_{p;\,\omega} \leq \|\partial_\gamma u\|_{p;\,\omega^{|h|}},$$

für jedes $\omega \Subset \Omega$ und für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$, und es strebt

$$\Delta^h_\gamma u \xrightarrow{h \searrow 0} \partial_\gamma u \text{ in } L^p_{loc}(\Omega). \tag{2.6}$$

Bemerkung 2.8
Ist $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p \leq \infty$, so gilt:

$$\|\Delta^h_\gamma u\|_{k-1,p;\,\Omega_{|h|}} \leq \|\partial_\gamma u\|_{k,p;\,\Omega}.$$

Daraus ergibt sich insbesondere, dass in Satz 2.7 die Richtung i) $\Rightarrow$ ii) auch im Fall $p = 1$ richtig ist (nicht jedoch für $p = \infty$). Desweiteren gilt (2.6) auch im Fall $p = 1$.

Beweis von Satz 2.7.

Der Beweis erfolgt in drei Schritten. In einem ersten Schritt (1) beweisen wir zunächst die Hilfsaussage: Ist $u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ mit $1 \le p \le \infty$, so gilt:

$$\|\Delta_\gamma^h u\|_{p;\,\omega} \le \|\partial_\gamma u\|_{p;\,\omega^{|h|}} \tag{2.7}$$

für alle $\gamma \in \{1, \ldots, d\}$, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$ und $\omega \Subset \Omega$.

(1) Seien $\omega \Subset \Omega$ und $x \in \omega$ fixiert. Dann ist nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$\left|\Delta_\gamma^h u(x)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\, u(x + th\, e_\gamma)\, dt\right| \le \int_0^1 \left|\partial_\gamma u(x + th\, e_\gamma)\right| dt. \tag{2.8}$$

Für $1 < p < \infty$ ergibt daher die Hölder–Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|\Delta_\gamma^h u\|_{p;\,\omega}^p &\le \int_\omega \left(\int_0^1 \left|\partial_\gamma u(x + th\, e_\gamma)\right| dt\right)^p dx \\
&\le \mathcal{L}^1(0,1)^{p-1} \int_\omega \int_0^1 \left|\partial_\gamma u(x + th\, e_\gamma)\right|^p dt\, dx \\
&= \int_0^1 \int_\omega \left|\partial_\gamma u(x + th\, e_\gamma)\right|^p dx\, dt \le \int_{\omega^{|h|}} \left|\partial_\gamma u(z)\right|^p dz,
\end{aligned}$$

was (2.7) in diesem Fall liefert. Für $p = 1$ bzw $p = \infty$ erhält man (2.7) unmittelbar aus (2.8).

(2) Sei nun $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ mit $1 \le p < \infty$. Wir wollen (2.6) zeigen. Dazu betrachten wir eine Folge $(u_m) \subset C^\infty_\circ(\Omega)$ mit

$$u_m \xrightarrow{m} u \quad \text{und} \quad \partial_\gamma u_m \xrightarrow{m} \partial_\gamma u \quad \text{in } L^p_{loc}(\Omega)$$

(eine solche Folge haben wir im Beweis von Satz 1.6 i) konstruiert, wobei die Annahme $p < \infty$ entscheidend ist). Da offenbar (2.7) für jedes u_m gilt, liefern diese Konvergenzen, dass (2.7) auch für u gelten muss:

$$\|\Delta_\gamma^h u\|_{p;\,\omega} \le \|\partial_\gamma u\|_{p;\,\omega^{|h|}}.$$

Für $|h| \ll 1$ kann darin aber die rechte Seite unabhängig von h abgeschätzt werden, womit die Richtung *i)* $\Rightarrow$ *ii)* (sogar für $p = 1$) bewiesen ist. Nun aber zum Beweis von (2.6): Sei $\omega \Subset \Omega$ fixiert und sei $0 < r \le \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$, so dass also $\omega^r \Subset \Omega$ ist. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $m_0 = m_0(\varepsilon)$, so dass gilt:

$$\|\partial_\gamma u - \partial_\gamma u_m\|_{p;\,\omega^r} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle} \quad m > m_0.$$

Andererseits strebt offenbar $\Delta_\gamma^h u_m \xrightarrow{h \searrow 0} \partial_\gamma u_m$ gleichmäßig auf ω,[h], so dass zu $\varepsilon > 0$ ein $h_0 = h_0(\varepsilon) < r$ existiert mit

$$\|\partial_\gamma u_m - \Delta_\gamma^h u_m\|_{p;\,\omega} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle} \quad |h| < h_0.$$

Schließlich ist wegen (2.7)

$$\|\Delta_\gamma^h u_m - \Delta_\gamma^h u\|_{p;\,\omega} \le \|\partial_\gamma u - \partial_\gamma u_m\|_{p;\,\omega^r} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle} \quad m > m_0.$$

Zusammmen ergibt sich für alle $m > m_0$ und $|h| < h_0$ also

$$\begin{aligned}\|\partial_\gamma u - \Delta_\gamma^h u\|_{p;\,\omega} &\le \|\partial_\gamma u - \partial_\gamma u_m\|_{p;\,\omega^r} + \|\partial_\gamma u_m - \Delta_\gamma^h u_m\|_{p;\,\omega} \\ &\quad + \|\Delta_\gamma^h u_m - \Delta_\gamma^h u\|_{p;\,\omega} < \varepsilon,\end{aligned}$$

womit (2.6) (auch im Fall $p = 1$) bewiesen ist.

(3) Wir zeigen *ii)* $\Rightarrow$ *i)*: Sei $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit

$$\|\Delta_\gamma^h u\|_{p;\,\omega} \le c \quad \text{für alle} \quad \omega \Subset \Omega,\ |h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$$

mit einer Konstanten $c = c(\omega) > 0$. Die Familie $(\Delta_\gamma^h u)$ ist also beschränkt in $L^p(\omega)$, so dass es wegen $1 < p < \infty$ eine Nullfolge (h_ν) und eine Funktion $v_\omega \in L^p(\omega)$ gibt mit

$$\Delta_\gamma^{h_\nu} u \overset{\nu}{\rightharpoonup} v \text{ in } L^p(\omega)$$

(schwache Kompaktheit von L^p). Sei nun (ω_l) eine kompakte Ausschöpfung von Ω, so dass $\omega_1 = \omega$ ist. Es ist dann

$$\|\Delta_\gamma^{h_\nu} u\|_{p;\,\omega_2} \le c(\omega_2),$$

so dass es eine Teilfolge von (h_ν^1) sowie eine Funktion $v_{\omega_2} \in L^p(\omega_2)$ gibt mit

$$\Delta_\gamma^{h_\nu^1} u \overset{\nu}{\rightharpoonup} v_{\omega_2} \text{ in } L^p(\omega_2).$$

[h] Allgemein gilt bekanntlich: Ist $w \in C^1(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen), so strebt

$$\Delta_\gamma^h w \xrightarrow{h \searrow 0} \partial_\gamma w$$

lokal gleichmäßig auf Ω.

Wegen der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes gilt daher $v_{\omega_2}|_\omega = v_\omega$. Durch fortgesetzte Teilfolgenwahl ergibt sich mit dem Diagonalverfahren die Existenz einer Nullfolge (h'_ν) und einer Funktion $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit

$$\Delta_\gamma^{h'_\nu} u \overset{\nu}{\rightharpoonup} v \text{ in } L^p_{loc}(\Omega).$$

Bleibt nachzuweisen, dass $v = \partial_\gamma u$ ist. Sei dazu $\eta \in C^\infty_\circ(\Omega)$ beliebig. Mit der partiellen Integrationsregel für Differenzenquotienten und der eben gezeigten Konvergenz folgt:

$$\int_\Omega v\,\eta\,dx = \lim_\nu \int_\Omega \Delta_\gamma^{h'_\nu} u\,\eta\,dx = -\lim_\nu \int_\Omega v\,\Delta_\gamma^{-h'_\nu}\eta\,dx = -\int_\Omega \partial_\gamma \eta\,u\,dx,$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $\Delta_\gamma^{-h'_\nu}\eta \overset{\nu}{\to} \partial_\gamma \eta$ gleichmäßig auf Ω strebt. $\square$

§ 3. Einbettungssätze

Unter einer Einbettung versteht man eine Abbildung $j : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ mit $X \subset Y$ und $j(x) = x \in Y$. Uns interessieren Einbettungen zwischen Sobolev- und Lebesgue-Räumen, die stetig oder kompakt sind:

- Eine Einbettung heißt stetig, falls $\|j(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$ für alle $x \in X$ gilt;
- Eine Einbettung heißt kompakt, falls beschränkte Folgen (x_n) vermöge j auf kompakte Folgen abgebildet werden (d.h. $(j(x_n))$ hat eine in Y konvergente Teilfolge, falls (x_n) in X beschränkt ist).

Folgender Einbettungssatz ist für die Regularitätstheorie von enormer Bedeutug und stellt ein zentrals Ergebnis der Vorlesung dar.

Satz 3.1 (Sobolev) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann sind die Einbettungen*

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega) & ; \quad p < d \\ C^0(\overline{\Omega}) & ; \quad p > d, \, \mathcal{L}^d(\Omega) < \infty \end{cases}$$

stetig, d. h. für $c(d,p) > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_{\frac{dp}{d-p}} &\leq c(d,p)\, \|\nabla u\|_p && ; \quad p < d \\ \sup_\Omega |u| &\leq c(d,p)\, \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{d}-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_p && ; \quad p > d \end{aligned}$$

für alle $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$.

Korollar 3.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann gilt*

$$\mathring{W}^{k,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-kp}}(\Omega) & ; \quad kp < d \\ C^m(\overline{\Omega}) & ; \quad m \in \mathbb{N}_0, \, 0 \leq m \leq k - \frac{d}{p}, \, \mathcal{L}^d(\Omega) < \infty \end{cases}$$

(beachte: im zweiten Fall muss gelten $k - \frac{d}{p} > 0 \;\Rightarrow\; kp > n$).

Bemerkung 3.3 *a) Sei $p < d$. Dann heißt*

$$s(p) := \frac{dp}{d-p}$$

mit $s(p) > p$ der Sobolev-Exponent *zu p. Z.B. $d = 3$, $p = 2$, $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ ergibt $u \in L^6(\Omega)$; $d = 2$, $p > 2$, $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ ergibt $u \in C^0(\overline{\Omega})$.*

b) Ist $u \in \mathring{W}^{1,d}(\Omega)$, Ω beschränkt, so natürlich auch in $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ für alle $p < d$, d.h.

$$\mathring{W}^{1,d}(\Omega) \subset \bigcap_{q<\infty} L^q(\Omega),$$

(tatsächlich gilt etwas mehr, aber nicht $\subset L^\infty(\Omega)$, vgl.[Alt]).

c) Der Beweis von Korollar 3.2 folgt durch Iteration von Satz 3.1

Beweis von Satz 3.1.
(1) Sei $p = 1$. Wir betrachten zunächst $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Sei zunächst $d = 2$, dann gilt

$$u(x) = u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2)\, dt = \int_{-\infty}^{x_2} \partial_2 u(x_1, t)\, dt.$$

Es folgt

$$u^2(x) \leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(t, x_2)|\, dt\right)}_{=:\alpha(x_2)} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(x_1, t)|\, dt\right)}_{=:\beta(x_1)}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} u^2(x)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(x_2)\beta(x_1)\, dx &= \int_{x_1\in\mathbb{R}} \int_{x_2\in\mathbb{R}} \alpha(x_2)\beta(x_1)\, dx_2 dx_1 \\
&= \int_{x_1\in\mathbb{R}} \beta(x_1)\, dx_1 \int_{x_2\in\mathbb{R}} \alpha(x_2)\, dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u|\, dx \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u|\, dx.
\end{aligned}$$

Für die L^2-Norm erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u|\, dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u|\, dx} \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\partial_2 u| + |\partial_1 u|)\, dx \\
&= \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Das Vorgehen für $d \geq 3$ erfolgt analog, wir geben eine kurze Skizze: Für alle $i \in \{1, ..., d\}$ ist

$$u(x) = u(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_d) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_d)\, dt$$

und damit

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_d)|\, dt; \\ |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} &= [|u(x)| \cdot ... \cdot |u(x)|]^{\frac{1}{d-1}} \\ &\leq \left[\prod_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u(...)|\, dt\right]^{\frac{1}{d-1}}. \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}}\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left[\prod_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u(...)|\, dt\right]^{\frac{1}{d-1}} dx.$$

Iteratives Anwenden der Young-Ungleichung mit $d-1$ und $\frac{d-1}{d-2}$,... ergibt schließlich

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)} \leq \frac{1}{d} \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.1}$$

Sei $u \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$, dann existiert eine Folge $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|u - u_m\|_{W^{1,1}} \to 0$. Aus (3.1) folgt, dass (u_m) eine Cauchy-Folge ist in $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ mit Limes $\tilde{u} \in L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$. Wegen $u_m \to u$ in $L^1(\Omega)$ gilt $\tilde{u} = u$, d.h. $u \in L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$. Mit $m \to \infty$ erhalten wir also (3.1) für alle $u \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$.
(2) Sei $p \in (1, d)$ und $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Für $\gamma > 1$ definieren wir $v := |u|^\gamma$, es folgt $v \in C_0^1(\Omega)$ und (3.1) gilt für v, also

$$\left(\int_\Omega |u|^{\gamma \frac{d}{d-1}}\, dx\right)^{1-\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{d} \int_\Omega \gamma |u|^{\gamma-1} |\nabla u|\, dx.$$

Setzen wir $\gamma := \frac{(d-1)p}{d-p} \in (1, \infty)$, so erhalten wir mit der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega |u|^{\frac{dp}{d-p}}\, dx\right)^{1-\frac{1}{d}} &\leq \frac{\gamma}{d} \int_\Omega |u|^{\gamma-1} |\nabla u|\, dx \\ &\leq \frac{\gamma}{d} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \left(\int_\Omega |u|^{\frac{p}{p-1}(\gamma-1)}\, dx\right)^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\gamma}{d}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \left(\int_\Omega |u|^{\frac{dp}{d-p}}\,dx\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Wir können jetzt annehmen, dass u nicht identisch Null ist (dieser Fall ist trivial), so dass $\int_\Omega |u|^{\frac{dp}{d-p}(\gamma-1)}\,dx > 0$ und daher ist

$$\left(\int_\Omega |u|^{\frac{dp}{d-p}}\,dx\right)^{1-\frac{1}{d}-1-\frac{1}{p}} \leq \frac{\gamma}{d}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Offenbar ist $\frac{1}{p} - \frac{1}{d} = \frac{d-p}{dp}$, also

$$\|u\|_{\frac{dp}{d-p}} \leq \frac{1}{d}\frac{(d-1)p}{d-p}\|\nabla u\|_p \tag{3.2}$$

für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Zu $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ wähle man $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Dann ist (u_m) Cauchy-Folge in $L^{\frac{dp}{d-p}}$, d.h. $u_m \to \tilde{u}$ in $L^{\frac{dp}{d-p}}$. Wie zuvor muss $\tilde{u} = u$ gelten, weswegen wir für $m \to$ (3.2) für alle $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ erhalten.

(3) Sei $p \in (d, \infty)$. Zusätzlich ist hier $\mathcal{L}^d(\Omega) < \infty$ vorausgesetzt. Ohne Einschränkung sei $\mathcal{L}^d(\Omega) = 1$, falls nicht transormieren wir:

$$\begin{aligned} &\tilde{u} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{u}(x) = u\left(\mathcal{L}^d(\Omega)^{\frac{1}{d}}x\right), \\ &\tilde{\Omega} := \left\{\mathcal{L}^d(\Omega)^{-\frac{1}{d}}x,\ x \in \Omega\right\}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun

$$\sup_{\tilde{\Omega}} |\tilde{u}| \leq c(d,p)\|\nabla\tilde{u}\|_{L^p(\tilde{\Omega})}, \tag{3.3}$$

Rücktransformation ergibt dann

$$\sup_{\Omega} |u| \leq c(d,p)\mathcal{L}^d(\Omega)^{\frac{1}{d}-\frac{1}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.4}$$

Zunächst sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$, wir definieren $v := d\frac{|u|}{\|\nabla u\|_p}$ (ohne Einschränkung sei u nicht konstant, dieser Fall ist trivial). Ist $\gamma > 1$, so ist $v^\gamma \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$, also gilt (3.1), d.h. mit $d' := \frac{d}{d-1}$

$$\|v^\gamma\|_{d'} \leq \frac{1}{d}\|\nabla v^\gamma\|_1 = \frac{\gamma}{d}\|v^{\gamma-1}\nabla v\|_1 \leq \frac{\gamma}{d}\|\nabla v\|_p\|v^{\gamma-1}\|_{p'},$$

wobei wir im letzten Schritt die Höldersche Ungleichung benutzt haben. Beachtet man jetzt $|\nabla v| \le d|\nabla u| \|\nabla u\|_p^{-1}$, so folgt $\|\nabla v\|_p \le d$ und damit

$$\|v^\gamma\|_{d'} \le \gamma \|v^{\gamma-1}\|_{p'}.$$

Schließlich ergibt sich

$$\begin{aligned}\|v\|_{\gamma d'} = \|v^{\frac{1}{\gamma}}\|_{d'}^{\frac{1}{\gamma}} \le \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v^{\gamma-1}\|_{p'}^{\frac{1}{\gamma}} &= \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int |v|^{(\gamma-1)p'}\,dx \right)^{\frac{1}{p'}\frac{1}{\gamma}} \\ &= \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int |v|^{(\gamma-1)p'}\,dx \right)^{\frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{p'}\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v\|_{p'(\gamma-1)}^{1-\frac{1}{\gamma}}. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Können wir zeigen, dass

$$\|v\|_{p'(\gamma-1)} \le \|v\|_{p'\gamma} \qquad (3.6)$$

gilt, so erhalten wir

$$\|v\|_{\gamma d'} \le \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v\|_{p'\gamma}^{1-\frac{1}{\gamma}}. \qquad (3.7)$$

Kommen wir zum Beweis von (3.6): es ist wegen $\mathcal{L}^d(\Omega) = 1$ nach Hölder

$$\left[\int_\Omega |v|^{p'(\gamma-1)}\,dx \right]^{\frac{1}{p'(\gamma-1)}} \le \left[\left(\int_\Omega |v|^{p'\gamma}\,dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{p'(\gamma-1)}} = \|v\|_{p'\gamma}.$$

Man beachte, dass in (3.7) höhere Potenzen durch niedrigere abgeschätzt werden (beachte $d' > p'$), dies wollen wir iterieren: mit $\delta := \frac{d'}{p'} > 1$ und $\gamma := \delta^\nu$ für $\nu \in \mathbb{N}$ folgt aus (3.7)

$$\|v\|_{\delta^\nu d'} \le \delta^{\nu\delta^{-\nu}} \|v\|_{p'\delta^\nu}^{1-\delta^{-\nu}} = \delta^{\nu\delta^{-\nu}} \|v\|_{d'\delta^{\nu-1}}^{1-\delta^{-\nu}}.$$

(3.7) mit $\gamma = \delta^{\nu-1}$ ergibt

$$\|v\|_{d'\delta^{\nu-1}} \le \delta^{(\nu-1)\delta^{1-\nu}} \|v\|_{d'\delta^{\nu-2}}^{1-\delta^{1-\nu}}$$

und damit

$$\|v\|_{\delta^\nu d'} \le \delta^{(\nu-1)\delta^{\nu-1}+(\nu-1)\delta^{-(\nu-1)}} \|v\|_{d'\delta^{\nu-2}}^{\cdots}.$$

Induktiv erhalten wir

$$\|v\|_{\delta^\nu d'} \le \delta^{\sum_{k=1}^{\nu} k\delta^{-k}} \|v\|_{d'}^{\cdots} \qquad (3.8)$$

und wegen $\|v\|_{d'} = \|v\|_{\frac{d}{d-1}} \le \frac{1}{d}\|\nabla v\|_1 \le \frac{1}{d}\|\nabla v\|_p \le 1$ folgt

$$\|v\|_{\delta^\nu d'} \le \delta^{\sum_{k=1}^{\infty} k\delta^{-k}} = c(d,p).$$

Man beachte, dass obige Summe wegen $\delta > 1$ konvergiert. Lassen wir auf der linken Seite $\nu \to \infty$ laufen, sehen wir (vgl. GdV Blatt 3)

$$\|v\|_\infty \leq c(d,p).$$

Die Definiton von v liefert hieraus

$$\|u\|_\infty \leq c(d,p)\|\nabla u\|_p \tag{3.9}$$

für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Ist $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, so wählt man $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Dann ist (u_m) Cauchy-Folge in L^∞, d.h. $u_m \to \tilde{u}$ in L^∞. Es folgt $u \in C^0(\overline{\Omega})$ (als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen, $\tilde{u}$ ist Vertreter von u) und (3.9) für alle $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. □

Es gibt Versionen des Einbettungssatzes für die Räume $W^{k,p}(\Omega)$, falls $\partial\Omega$ genügens glatt ist. Auf einen Beweis wird hier verzichtet, wir verweisen etwa auf [Alt].

Satz 3.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann sind die Einbettungen*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega) & ; \quad p < d \\ C^0(\overline{\Omega}) & ; \quad p > d \end{cases}$$

stetig, d. h. für $c(d,p,\Omega) > 0$ gilt

$$\|u\|_{\frac{dp}{d-p}} \leq c(d,p,\Omega)\,\|u\|_{1,p} \quad ; \quad p < d$$
$$\sup_\Omega |u| \leq c(d,p,\Omega)\,\|u\|_{1,p} \quad ; \quad p > d$$

für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Korollar 3.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann gilt*

$$W^{k,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-kp}}(\Omega) & ; \quad kp < d \\ C^m(\overline{\Omega}) & ; \quad m \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq m \leq k - \frac{d}{p},\ kp > d \end{cases}$$

Bemerkung 3.6 *a) Die Einbettungen im Fall $p > d$ können noch verschärft werden (Satz von Morrey, vgl. etwa [GT] Kapitel 7): Die Räume $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ und $W^{1,p}(\Omega)$ (im zweiten Fall Ω beschränkt mit Lipschitz-Rand) sind stetig eingebettet in $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ mit $\gamma = 1 - \frac{d}{p}$. Die Räume $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ und*

$W^{k,p}(\Omega)$ sind stetig eingebettet in $C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$ mit $\gamma = k - \frac{d}{p} - m$, falls $0 \le m < k - \frac{d}{p} < m+1$.

b) *Für $p = d$ gilt nicht $\mathring{W}^{1,d}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, die Aussage $\mathring{W}^{1,d}(\Omega) \subset \bigcap_{q<\infty} L^q(\Omega)$ lässt sich jedoch noch verbessern, es gilt*

$$u \in \mathring{W}^{1,d}(\Omega) \;\Rightarrow\; \int_\Omega \exp\{const|u - (u)_\Omega|\}\, dx < \infty$$

wobei $(u)_\Omega$ der Mittelwert von u über Ω ist (Trudinger-Ungleichung, vgl. [GT]).

Wir kommen jetzt zu kompakten Einbettungen

Definition 3.1 *Seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ ein stetig linearer Operator. T heißt kompakt, falls für jede in X beschränkte Folge (x_n) die Folge (Tx_n) eine (in Y) konvergente Teilfolge besitzt.*

Satz 3.8 (Rellich-Kondrachov) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann ist die Einbettung*

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^t(\Omega) \quad \text{für alle } t < \frac{pd}{d-p}$$

für $p < d$ kompakt.

Bemerkung 3.9 a) *Man beachte, dass die obere Grenze der Exponenten, für die man kompakte Einbettungen bekommt, gerade der Sobolev-Exponent ist.*

b) *Iterativ erhält man die Kompaktheit der Einbettung $\mathring{W}^{k,p}(\Omega) \subset L^t(\Omega)$ für alle $t < \frac{dp}{d-kp}$.*

c) *Die Räume $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ sind kompakt eingebettet in $C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$ für alle $\beta < \gamma = k - \frac{d}{p} - m$, falls $0 \le m < k - \frac{d}{p} < m+1$ (vg. [GT] Kapitel 7).*

d) *Wie in Satz 3.4 gelten auch hier analoge Aussagen für die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ mit Lipschitz-Rand im Fall einer beschränkten Menge Ω.*

Bevor wir zum Beweis von Satz 3.8 kommen, benötigen wir noch folgendes

Lemma 3.10 *Sei $(f_k) \subset L^p(X,\mu)$ mit $1 \le p < \infty$ und es gelte $f_k \to f$ μ-f.ü. sowie*

$$\sup_k \int_E |f_k|^p\, d\mu \to 0, \quad \text{wenn } \mu(E) \to 0,$$

und zu $\epsilon > 0$ *gibt es eine* μ*-messbare Teilmenge* E_ϵ *mit* $\mu(E_\epsilon) < \infty$ *und*

$$\sup_k \int_{X-E_\epsilon} |f_k|^p \, d\mu \leq \epsilon.$$

Dann gilt $f \in L^p(X,\mu)$ *und* $f_k \to f$ *in* $L^p(X,\mu)$*.*

Bemerkung 3.11 *Obiges Lemma ist als Konvergenz-Satz von Vitali bekannt und es gilt auch die Rückrichtung, d.h. aus* $f_k \to f$ *in* $L^p(X,\mu)$ *(sowie* μ*-f.ü.) folgen die beiden Integralkriterien (vgl. [Alt], 1.19).*

Beweis.
Es gilt $f_k \to f$ μ-f.ü. auf E_ϵ. Nach dem satz von Egorov (vgl. [Alt] 1.17) existiert eine Teilmenge $A_\epsilon \subset E_\epsilon$ mit $f_k \to f$ gleichmäßig auf A_ϵ und $\mu(E_\epsilon - A_\epsilon) \leq \epsilon$. Es folgt

$$\begin{aligned} &\int_X |f_k - f_l|^p \, d\mu = \int_{A_\epsilon} |f_k - f_l|^p \, d\mu + \int_{X-A_\epsilon} |f_k - f_l|^p \, d\mu \\ &\leq \mu(A_\epsilon) \sup_{A_\epsilon} |f_k - f_l|^p + c \left\{ \sup_m \int_{X-E_\epsilon} |f_m|^p \, d\mu + \sup_m \int_{A_\epsilon - E_\epsilon} |f_m|^p \, d\mu \right\}. \end{aligned}$$

Für $\epsilon \to 0$ verschwinde der letzte Term, während der mittlere nach Voraussetzung $\leq \epsilon$ ist und demnach auch verschwindet. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf A_ϵ folgt, dass (f_k) Cauchy-Folge in $L^p(X,\mu)$ ist und daher konvergiert (man überlegt sich leicht, dass beide Limiten gleich sein müssen, vgl. GdV A 15). □

Beweis.
Wir zeigen zunächst die kompakte Einbettung

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega). \tag{3.10}$$

Der Rest folgt danach relativ leicht mit Lemma 3.10. Sei u_k in $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ beschränkt. Für $p > 1$ erhalten wir nach Übergang zu einer Teilfolge direkt $u_k \rightharpoonup: u$ in $L^p(\Omega)$. Für $p = 1$ folgt mit dem Satz von Sobolev die Beschränktheit von u_k in $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ und (nach TFW) $u_k \rightharpoonup u$ in $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ und damit auch in $L^1(\Omega)$ (Ω ist beschränkt). Wir setzen u_k und u auf $\mathbb{R}^d - \Omega$ durch 0 fort. Dann ist $u_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ mit Träger in $\overline{\Omega}$. Die Glättung $(u_k)_\epsilon$ gehört dann zur Klasse $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ und

$$(u_k)_\epsilon \overset{k\to\infty}{\to} u_\epsilon \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d). \tag{3.11}$$

Zum Beweis betrachte man für fixiertes $x \in \mathbb{R}^d$ und $\epsilon > 0$ die Funktionale $\Psi_\epsilon^x \in L^p(\Omega)^*$ definiert durch

$$\Psi_\epsilon^x(v) := \int_\Omega v(y)\eta_\epsilon(x-y)\,dy.$$

Konvergiert $x_k \to x$ für $k \to \infty$, so konvergieren $\eta_\epsilon(x_k - \cdot) \to \eta_\epsilon(x - \cdot)$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^d$, also $\Psi_\epsilon^{x_k} \to \Psi_\epsilon^x$ in $L^p(\Omega)^*$. Es folgt

$$(u_k)_\epsilon(x_k) = \int_{B_\epsilon(x_k)} \eta_\epsilon(z-x_k)u_k(z)\,dz = \Psi_\epsilon^{x_k}(u_k) \to \Psi_\epsilon^x(u).$$

Damit folgt sogar $(u_k)_\epsilon \to u_\epsilon$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{R}^d$, also insbesondere (3.11), da $(u_k)_\epsilon$ und u_ϵ außerhalb von kompakten Mengen 0 sind. Eine weitere Hilfsaussage, die wir benötigen ist

$$\|v - v_\epsilon\|_p \le \epsilon\|\nabla v\|_p \text{ für alle } v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d). \tag{3.12}$$

Man beachte, dass linke und rechte Seite dieser Ungleichung stetig von v abhängen. Können wir also obige Ungleichung für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ zeigen, so folgt der Rest durch Approximation (vgl. Kapitel 1). Es ist

$$\begin{aligned}(v_\epsilon - v)(x) &= \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(z-x)(v(z)-v(x))\,dz = \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(z)(v(z+x)-v(x))\,dz \\ &= \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(z)\left(\int_0^1 \nabla v(x+sz)\cdot z\,ds\right)dz.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$|(v - v_\epsilon)(x)| \le \epsilon \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(z)\left(\int_0^1 |\nabla v(x+sz)|\,ds\right)dz.$$

Definieren wir $F(x,z) := (...)$, so folgt im Fall $p > 1$

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(z)|F(x,z)|\,dz\right)^p dx \le \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\epsilon^{\frac{1}{p'}}(z)\eta_\epsilon^{\frac{1}{p}}(z)F(x,z)\,dz\right)^p dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\eta_\epsilon(z)\,dz\right)^{\frac{p}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\eta_\epsilon(z)|F(x,z)|^p\,dz\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\eta_\epsilon(z)\left(\int_{\mathbb{R}^d}|F(x,z)|^p\,dx\right)dz \\ &\le \sup_{z\in B_\epsilon(0)}\int_{\mathbb{R}^d}|F(x,z)|^p\,dx.\end{aligned}$$

Im Fall $p = 1$ erhält man obige Ungleichung direkt ohne Anwendung der Hölder-Ungleichung. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\|v - v_\epsilon\|_p^p &\le \epsilon^p \sup_{z\in B_\epsilon(0)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 |\nabla v(x+sz)|^p \, dsdx \\ &= \epsilon^p \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 |\nabla v(x+sz^*)|^p \, dsdx = \epsilon^p \|\nabla v\|_p^p.\end{aligned}$$

Mit (3.11) und (3.12) ergibt sich leicht (3.10):

$$\begin{aligned}\|u - u_k\|_p &\le \|u - u_\epsilon\|_p + \|u_\epsilon - (u_k)_\epsilon\|_p + \|(u_k)_\epsilon - u_k\|_p \\ &\le \|u - u_\epsilon\|_p + \|u_\epsilon - (u_k)_\epsilon\|_p + \epsilon\|\nabla u_k\|_p.\end{aligned}$$

und die Beschränktheit von ∇u_k in $L^p(\Omega)$ liefert

$$\lim_{k\to\infty} \|u - u_k\|_p \le c\epsilon + \|u - u_\epsilon\|_p,$$

was wegen der Beliebigkeit von ϵ (3.10) impliziert (beachte Satz 1.5).
Sei jetzt $(u_k) \subset \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ beschränkt: wir wissen nach Teilfolgenwahl $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$ sowie punktweise f.ü. Mit Satz 3.1 ist u_k in $L^{s(p)}(\Omega)$ beschränkt. Für $t < s(p)$ folgt mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung (Exponenten $\frac{s(p)}{t}$ und $\frac{s(p)}{s(p)-t}$)

$$\sup_k \int_E |u_k|^t \, dx \le \sup_k \|u_k\|_{s(p)}^t \mathcal{L}^d(E)^{\frac{s(p)-t}{s(p)}} \overset{\mathcal{L}^d(E)\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Zu $\delta > 0$ existiert eine messbare Menge $E_\delta \subset \Omega$ mit $\mathcal{L}^d(\Omega - E_\epsilon) \le \delta$ (z.B. eine innere Parallelmenge) und

$$\sup_k \int_{\Omega - E_\delta} |u_k|^t \, dx \le \sup_k \|u_k\|_{s(p)}^t \mathcal{L}^d(\Omega - E_\delta)^{\frac{s(p)-t}{s(p)}} \le \epsilon$$

bei passender Wahl von δ. Lemma 3.10 ergibt $u_k \to u$ in $L^t(\Omega)$. □

Der folgende Satz zeigt unter anderem wie man Kompakheit für Räume Hölder-stetiger Funktionen erhält (und als Spezialfall Räume Lipschitz-stetiger Funktionen). Zunächst beachte man noch den Zusammenhang zwischen $\mathrm{Lip}(\Omega)$ und $W^{1,\infty}(\Omega)$.

Lemma 3.12 *a) Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen, beschränkt und konvex, so gilt* $W^{1,\infty}(\Omega) = \mathrm{Lip}(\Omega)$*, wobei*

$$\mathrm{Lip}(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \ \mathrm{Lip}(u) := \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} < \infty \right\}.$$

Insbesondere gilt $\|\nabla u\|_\infty = \mathrm{Lip}(\Omega)$.

b) Für nichtkonvexe beschränkte Gebiete gilt $W^{1,\infty}_{loc}(\Omega) = \mathrm{Lip}_{loc}(\Omega)$.

Satz 3.13 (Arzelà–Ascoli)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen und beschränkt und sei* $(u_m) \subset C^0(\overline{\Omega})$ *und habe die Eigenschaften:*

i) (Beschränktheit)

$$\sup_m \|u_m\|_\infty < \infty$$

ii) (Gleichgradige Stetigkeit)

$$\sup_m \left| u_m(x) - u_m(y) \right| \xrightarrow{m} 0$$

für alle $x, y \in \overline{\Omega}$ *mit* $|x - y| \to 0$.

Dann gibt es eine Teilfolge $\left(u_{m_k}\right)$ *von* (u_m) *sowie eine Funktion* $u \in C^0(\overline{\Omega})$*, so dass gilt:*

$$u_{m_k} \xrightarrow{k} u \text{ gleichmäßig in } \overline{\Omega}.$$

Die *gleichgradige Stetigkeit* ii) in Satz 3.13 ist insbesondere dann gewährleistet, wenn $(u_m) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ mit einem $\alpha \in (0,1]$ ist und die Hölder–Konstante gleichmäßig beschränkt ist: $\sup_m [u_m]_\alpha < \infty$. Ferner kann man dann i) aus Satz 3.13 abschwächen zu

$$\sup_m \left| u_m(x) \right| < \infty \quad \text{für alle} \quad x \in \overline{\Omega},$$

braucht also keine gleichmäßige Beschränktheit bzgl. $\overline{\Omega}$. Man beachte, dass gleichmäßige Beschränktheit und gleichgradige Stetigkeit sogar äquivalent zur Existenz einer konvergenten Teilfolge sind (vgl. [Alt], S. 87). Eine beschränkte Folge in $W^{1,\infty}(\Omega)$ hat also eine Teilfolge, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert. Man überlegt sich leicht, dass auch die Lipschitz-Stetigkeit erhalten bleibt, d.h. also der Limes gehört wieder zum Raum $W^{1,\infty}(\Omega)$.

Beweis.
Da $\mathbb{Q}^d$ dicht in $\mathbb{R}^d$ liegt ist Ω seperabel, d.h. wir finden eine abzählbare dichte

Teilmenge $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ von Ω. Wegen (i) ist $(f_m(x_1))$ beschränkt in $\mathbb{R}$, so dass wir eine konvergente Teilfolge $(f'_m(x_1))$ wählen können. Analog ist $(f'_m(x_2))$ beschränkt und wir finden eine konvergente Teilfolge $(f''_m(x_2))$. Mit dem Diagonalverfahren finden wir sukzessiv eine Folge $f_{m_k} \subset (f_m)$, so dass $f_{m_k}(x_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ konvergiert. Wir definieren $g_k := f_{m_k}$ und wollen zeigen, dass g_k punktweise konvergent ist.
Seien $x \in \Omega$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Dann folgt aus (ii) die Existenz von $\rho = \rho(\epsilon)$ mit

$$f_m(B_\rho(x)) \subset B_\epsilon(f_m(x))\ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Da $g_k(x_i)$ konvergent ist gilt $|g_p(x_i) - g_q(x_i)| < \epsilon$, falls $p, q \geq n_0 = n_0(\epsilon, i)$. Zu $\delta > 0$ existiert $i > 1$ mit $x_i \subset B_\rho(x)$ und es folgt für alle $p, q \geq n_0$

$$|g_p(x) - g_q(x)| \leq |g_p(x) - g_p(x_i)| + |g_p(x_i) - g_q(x_i)| + |g_q(x_i) - g_q(x)| < 3\epsilon. \tag{3.14}$$

Demnach ist $(g_k(x))$ für alle $x \in \Omega$ eine C.F., d.h.

$$g(x) := \lim_k g_k(x)$$

existiert für alle $x \in \Omega$. Wir müssen noch zeigen

- g is stetig;
- $g_k \to g$ gleichmäßig bei $k \to \infty$.

Sei $x \in \Omega$, $\epsilon > 0$. Wählen wir δ wie in (3.13), so erhalten wir für alle $y \in B_\rho(x)$

$$|g(y) - g(x)| = \lim_k |g_k(y) - g_k(x)| \leq \epsilon,$$

d.h. g ist stetig. Die gleichmäßige Konvergenz sieht man wie folgt: Nehmen wir an, wir hätten keine gleichmäßige Konvergenz. Dann existiert eine Teilfolge $(g'_k) \subset (g_k)$ und ine Folge $x_k \subset \Omega$ mit

$$|g'_k(x_k) - g(x_k)| \geq 3\epsilon.$$

Ohne Einschränkung nehmen wir an $x_k \to: x$ (sonst gehe man zu Teilfolgen über). Für $n \gg 1$ ist $x_n \in B_\rho(x)$ und aus (3.14) folgt

$$\begin{aligned} 3\epsilon &\leq |g'_k(x_k) - g(x_k)| \\ &\leq |g'_k(x_k) - g'_k(x)| + |g'_k(x) - g(x)| + |g(x) - g(x_k)| < 3\epsilon, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Das folgende Lemma zeigt schließlich noch welche Bedingung notwendig ist für Kompaktheit in $L^p(\Omega)$. *Lemma von Riesz* (siehe etwa [Ad], Thm. 2.21 oder [Alt], Satz 4.24):

Lemma 3.14 (Riesz)
Seien $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $(u_m) \subset L^p(\Omega)$ beschränkt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiere ein $\omega \Subset \Omega$ und ein $\delta > 0$ gibt, derart dass gilt:

$$\sup_m \int_\Omega \left|\bar{u}_m(x+h) - u(x)\right|^p dx \leq \varepsilon^p \quad \textit{und} \quad \sup_m \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \left|u_m(x)\right|^p dx \leq \varepsilon^p$$

für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \delta$. Dann existiert eine Teilfolge (u_{m_k}) und $u \in L^p(\Omega)$ mit $u_{m_k} \to u$ in $L^p(\Omega)$.

Bemerkung 3.12 *a) In Lemma 3.14 bedeutet die zweite Bedingung, dass die Elemente einer relativ kompakten Menge auf „Randstreifen“ im L^p–Sinn gleichmäßig klein werden müssen.*

b) Wie auch schon im Satz von Arzela-Ascoli sind obige Bedingungen notwendig und hinreichend für Kompaktheit in $L^p(\Omega)$.

§ 4. Randverhalten von Sobolev-Funktionen

Bisher haben wir Randwerte von Sobolev-Funktionen im folgenden Sinn interpretiert: $u = u_0$ auf $\partial\Omega$ genau dann, wenn $u - u_0 \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, wobei $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ für $p < \infty$ der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$ ist. Wir werden in diesem Kapitel eine präzisere Definition von Randwerten erarbeiten und zeigen, dass diese mit der uns gewohnten übereinstimmt.

Zunächst benötigen wir dazu noch eine verbesserte Version des Approximationssatzes "H=W"von Meyers-Serrin. Notwendig dazu, sowie für die Folgeüberlegungen ist ein "vernünftiger"Rand $\partial\Omega$ von Ω. Unter allgemeinen Bedingungen (wie in Kapitel 2) ist die Aussage falsch. Einen Beweis findet man in [Ad], Thm. 3.18.

Satz 4.1 *Sei Ω ein beschränktes Gebiet und genüge einer inneren Kegelbedingung. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$: $C^\infty(\overline{\Omega})$ ist dicht in $W^{k,p}(\Omega)$*

Bemerkung 4.2 *a) Eine innere Kegelbedingung bedeutet, dass es EINEN Kegel gibt, der in JEDEM Randpunkt so angelegt werden kann, dass der gesamte Kegel in Ω liegt. Dies schließt z.B. exponentielle Spitzen aus. Eine innere Kegelbedingung ist unter anderem erfüllt, wenn $\partial\Omega$ ein Lipschitz-Rand ist.*

b) Im Gegensatz zu Satz 1.6 gibt es hier eine Folge (u_m), bestehend aus Funktionen, die bis zum Rand glatt sind mit $\|u_m - u\|_{k,p} \to 0$ bei $m \to \infty$. In Satz in 1.6 erhielt man nur $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.

Im Folgenden benötigen wir Räume von Funktionen die über den Rand integrierbar sind, d.h. für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen sei $L^p(\partial\Omega)$:= Menge aller $\mathcal{H}^{d-1}$-messbaren Funktionen mit

$$\|f\|_{L^p(\partial\Omega)} := \left(\int_{\partial\Omega} |f|^p \, d\mathcal{H}^{d-1} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Für C^1-Funktionen definieren wir den Operator $\mathcal{B} : C^1(\overline{\Omega}) \to L^p(\partial\Omega)$ durch $\mathcal{B}u := u|_{\partial\Omega}$ und erhalten (vgl. [Alt])

Lemma 4.3 *Sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann gilt*

$$\|\mathcal{B}u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c(d,p,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ betrachten wir eine Approximationsfolge $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ und $\|u_m - u\|_{1,p} \to 0$, deren Existenz nach Satz 4.2 gewährleistet ist. Aus Lemma 4.3 folgt, dass $(\mathcal{B}u_m)$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\partial\Omega)$. Der Limes dieser Folge, der nich von der speziellen Wahl der Folge abhängt wird nun als Spur von u bezeichnet.

Definition 4.1 *Der Operator $\mathcal{B} \to W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand, $1 \leq p < \infty$) mit $\mathcal{B}u := L^p(\partial\Omega)$-Limes von $u_m|_{\partial\Omega}$ ((u_m) Approximationsfolge zu u) heißt Spur-Operator.*

Bemerkung 4.6 *a) Der Fall $p = \infty$, der hier ausgeschlossen wurde, kann einfacher ebhandelt werden, falls Ω konvex ist. In dieser Situation gilt $W^{1,\infty}(\Omega) = \mathrm{Lip}(\Omega)$ (vgl. Lemma 3.12). Lipschitz-stetige Funktionen können unter Erhalt der Lipschitz-Konstanten zum Rand fortgestezt werden. Außerdem gilt nach Satz 3.4 $W^{1,\infty}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ (auch ohne Konvexität), so dass hier Randwerte wie gewohnt definiert werden können.*

b) Es lässt sich zeigen (vgl. [Mo], Thm. 3.6.3), dass $\mathcal{B}u$ für $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ die klassische Spur von u auf $\partial\Omega$ ist.

Wir kommen zu dem entscheidenden Satz dieses Kapitels

Satz 4.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschtz-Rand. Dann gilt für $1 \leq p < \infty$*

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega);\ \mathcal{B}u = 0\right\}.$$

Beweis.
Die Hinrichtung ist klar: Jede Funktion $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ lässt sich nach Definiton durch $C_0^\infty(\Omega)$-Funktionen approximieren (bzgl der $W^{1,p}(\Omega)$-Norm). Aufgrund der Stetigkeit des Spuroperators (vgl. Lemma 4.3) folgt

$$0 = \mathcal{B}u_m \longrightarrow \mathcal{B}u$$

in $L^p(\partial\Omega)$ bei $m \to \infty$.
"$\Longleftarrow$": Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\mathcal{B}u = 0$. Ω hat Lipschitz-Rand, falls sich $\partial\Omega$ durch endlich viele offene Mengen $U^1, .., U^l$ überdecken lässt, so dass $\partial\Omega \cap U^j$ für $j = 1, ..., l$ der Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion ist und $\Omega \cap U^j$ auf jeweils einer Seite dieses Graphen liegt. Mathematisch lässt sich das folgendermaßen formulieren: Es gibt ein $l \in \mathbb{N}$ und für $j = 1, .., l$ ein euklidisches

Koordiantensystem $e_i^j, ..., e_d^j$ in $\mathbb{R}^d$, einen Referenzpunkt $y^j \in \mathbb{R}^{d-1}$, Zahlen $r^j > 0$ und $h^j > 0$ und eine Lipschitz-stetige Funktion $g^j : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$, so dass mit der Bezeichnung

$$x_{,d}^j := (x_1^j, ..., x_{d-1}^j), \;\; x = \sum_{i=1}^d x_i^j e_i^j,$$

gilt

$$U^j = \left\{ x \in \mathbb{R}^d;\; |x_{,d}^j - y^j| < r^j \text{ und } |x_d^j - g^j(x_{,d}^j)| < h^j \right\},$$

und für $x \in U^j$

$$\begin{aligned} x_d^j = g^j(x_{,d}^j) &\implies x \in \partial\Omega, \\ 0 < x_d^j - g^j(x_{,d}^j) < h^j &\implies x \in \Omega, \\ 0 > x_d^j - g^j(x_{,d}^j) &\implies x \notin \Omega. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^l U^j$$

und, wenn wir noch eine passende offene Menge U^0 mit $\overline{U^0} \subset \Omega$ hinzunehmen,

$$\Omega \subset \bigcup_{j=0}^l U^j.$$

Wir lokalisieren bezüglich der Mengen U^j, $j = 0, ..., j$. Dazu sei $\eta^0, ..., \eta^l$ eine Partition der Eins bezüglich $\overline{\Omega}$, d.h. $0 \le \eta^j \le 1$, $\eta^j \in C_0^\infty(U^j)$ und

$$\sum_{j=0}^l \eta^j = 1 \text{ auf } \overline{\Omega}.$$

Ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$, so gilt

$$u = \sum_{j=0}^l \eta^j u.$$

Insbesondere ist $\eta^0 u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit kompaktem Träger in Ω und für $j = 1, ..., l$ ist $\eta^j u \in W^{1,p}(\Omega^j)$, wenn

$$\Omega^j := \left\{ x \in \mathbb{R}^d;\; 0 < x_d^j - g^j(x_{,d}^j) \right\},$$

wobei $(\eta^j u)(x) = 0$, falls $|x_{,d}^j - y^j| \ge r^j$ oder $x_d^j - g^j(x_{,d}^j) \ge h^j$. Durch Approximation von u sieht man

$$\mathcal{B}(\eta^j u) = \lim_m \mathcal{B}(\eta^j u_m) = \lim_m \eta^j u_m|_{\partial\Omega} = \lim_m \eta^j|_{\partial\Omega} u_m|_{\partial\Omega} = \mathcal{B}\eta^j \mathcal{B}u = 0$$

für $j = 1, ..., l$. Definieren wir

$$v_j(x) := \begin{cases} (\eta^j u)(x) & ; \quad x \in \Omega^j \\ 0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Es folgt $v_j \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, also für $\delta > 0$ auch

$$v_{j,\delta} := v_j(x - \delta e_d^j)$$

und es konvergiert $v_{j,\delta} \to v_j$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Außerdem gilt wegen $\mathcal{B}v_j = 0$ $\operatorname{spt} v_j \Subset \Omega$. Somit konvergiert auch

$$u_\delta := \eta^0 u + \sum_{j=1}^{k} v_{j,\delta} \longrightarrow u \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega) \text{ bei } \delta \to 0.$$

Da u_δ aber kompakten Träger in Ω hat, lässt sich diese Funktion mittels Glättung durch Funktionen in $C_0^\infty(\Omega)$ approxmieren. Es folgt $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. □

Korollar 4.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann gilt* $\mathring{W}^{1,q}(\Omega) = \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega)$

Beweis.
Wegen $\mathring{W}^{1,q}(\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega)$ und $\mathring{W}^{1,q}(\Omega) = \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ für beschränktes Ω ist die Inkulsion '$\subset$' klar. Man beachte, dass $\mathring{W}^{1,q}(\Omega)$-Funktionen durch glatte Funktionen in $W^{1,q}$ approximiert werden können, während in $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ nur die schlechtere Approximation in $W^{1,p}(\Omega)$ verfügbar ist. Mit dem Spursatz 4.7 ergibt sich aber: $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega) \Longrightarrow u \in W^{1,q}(\Omega)$ und $\mathcal{B}u = 0 \Longrightarrow u \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$. □

Zum Abschluss dieses Kapitels besprechen wir noch eine Variante der Sätze von Sobolev und Rellich-Kondrachov für den Spur-Operators. Einen Beweis findet man in etwa in [Ad], Thm. 5.22.

Satz 4.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand und $1 \le p < \infty$. Dann gilt*

a) Für $p < d$ ist die Einbettung

$$\mathcal{B}(W^{1,p}(\Omega)) \subset L^q(\partial\Omega)$$

für alle $q \leq \frac{(d-1)p}{d-p}$ *stetig.*

b) *Für* $q < \frac{(d-1)p}{d-p}$ *ist obige Einbetung kompakt.*

Bemerkung 4.10 a) *Man beachte, dass für* $p > d$ $W^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ *gilt (nach Satz 3.4). In diesem Fall existiert die Spur also im klassischen Sinn.*

- b) *Der Integrabilitätsexponent in Satz 4.9 ist schlechter als im Satz von Sobolev: Für* $p = 1$ *bekommt man keine neue Aussage (im Vergleich zu Lemma 4.3), für* $p > 1$ *gilt aber* $\frac{(d-1)p}{d-p} > p$.

c) *Satz 4.9 zeigt insbesondere, dass für* $p > 1$ $\mathcal{B}(W^{1,p}(\Omega)) \subsetneqq L^p(\partial\Omega)$ *gilt. Im Fall* $p = 1$ *erhält man* $\mathcal{B}(W^{1,1}(\Omega)) = L^1(\partial\Omega)$.

§ 5. Fraktionale Sobolev-Räume

In diesem Kapitel werden wir uns mit Sobolev-Räumen beschäftigen, deren Differenzierbarkeitsstufe keine ganze Zahl ist. Beispielsweise wird für $\Theta \in (0,1)$ der Raum $W^{\theta,2}$ definiert mit

$$L^2 \subsetneqq W^{\Theta,2} \subsetneqq W^{1,2}.$$

Inbesondere gibt es auch hier Versionen des Satzes von Sobolev, die zeigen, dass die Integrabilität im Raum $W^{\Theta,2}$ besser ist als im L^2, aber schlechter als in $W^{1,2}$. Auch mit Differenzenquotienten kann ein Zusammenghang hergestellt werden: Im $W^{1,2}$ gilt bekanntlich

$$\|\Delta_h u\|_2^2 \leq c,$$

während im L^2

$$\|\Delta_h u\|_2^2 \leq ch^{-2}$$

richtig ist. Passend dazu liefert $W^{\Theta,2}$

$$\|\Delta_h u\|_2^2 \leq ch^{2\Theta-2}.$$

Es gibt verschiedene Zugänge zur Definition dieser Räume. Wir werden die Räume $W^{\Theta,p}$ mit Hilfe der Fourier-Transformation definieren. Da die Fouriertransformation aus der Ableitung eine Multiplikation macht, erscheint dieser Ansatz am einfachsten. Zunächst werden wir uns daher mit den Eigenschaften der Fourier-Transformation beschäftigen.

Definition 5.1 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann ist*

$$\widehat{f}(k) := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ikx} f(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{R}^d$$

die Fourier-Transformierte zu f.

Die folgenden Eigenschaften lassen sich elemtar beweisen.

Lemma 5.3 *a) Die Abbildung $f \mapsto \widehat{f}$ ist linear;*

b) $\|\widehat{f}\| \leq (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \|f\|_1$ *und* $\widehat{f}$ *ist stetig;*

c) $\widehat{\partial_{x_\gamma} f} = ik_\gamma \widehat{f}$*;*

d) $\widehat{-ix_\gamma f} = \partial_{k_\gamma} \widehat{f}$*, falls* $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$*.*

Mit obiger Defintion sind wir lediglich in der Lage die Fourier-Transformation für L^1-Funktionen zu definieren. Da $L^1(\mathbb{R}^d)$ anders als bei beschränkten Gebieten nicht $L^p(\mathbb{R}^d)$ enthält, scheint diese Definiton nur von bedingtem Nutzen zu sein. Außderm ist die Rücktransformation

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ikx} \widehat{f}(x)\, dx$$

nur möglich, wenn $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt. Dies ist aber im Allgemeinen falsch.

Definition 5.2 *Die Schwartz-Klasse* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *ist definiert als Menge aller Funktionen* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *mit*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta f(x)| = p_{\alpha,\beta}(f) < \infty$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$*.*

Offenbar gilt $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ enthält aber auch Funktionen, die keinen kompakten Träger haben wie z.B. $e^{-|x|^2}$. $(p_{\alpha,\beta})$ ist eine abzählbare Familie von Seminormen auf $\mathcal{S}$ und gestatte es uns eine Topologie auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ zu definieren: Eine Folge $(\phi_k) \subset \mathcal{S}$ konvegriert gegen 0 genau dann wenn für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$

$$\lim_{k \to \infty} p_{\alpha,\beta}(\phi_k) = 0.$$

Mit dieser Topologie ist $\mathcal{S}$ ein Fréchet-Raum (vollständig und metrisierbar) un liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Insbesondere gilt $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, d.h. die Fourier-Transformation im Sinne von Def. 5.1 ist wohldefiniert auf $\mathcal{S}$.

Definition 5.3 *Die Menge der stetigen linearen Funktionale auf* $\mathcal{S}$*,* $\mathcal{S}'$*, wird als Menge der get Distributionen bezeichnet. Eine lineare Abbildung* $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ *gehört zu* $\mathcal{S}'$*, falls*

$$\lim_{k \to \infty} T(\phi_k) = 0 \quad \textit{sobald} \quad \lim_{k \to \infty} \phi_k = 0 \ \textit{in}\ \mathcal{S}.$$

Satz 5.6 *Die Fourier-Transformation ist eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ mit*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g}\, dz = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g\, dz \tag{5.1}$$

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx} \widehat{f}(x)\, dx \tag{5.2}$$

für alle $f \in \mathcal{S}$.

Beweis.

Wir beweisen zunächste die folgende Hilfsaussage

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{f}(k) = e^{-\frac{1}{2}|k|^2}. \tag{5.3}$$

Offenbar gilt hier

$$f(x) = \prod_{i=1}^{d} e^{-\frac{1}{2}x_i^2} =: \prod_{i=1}^{d} f_i(x_i)$$

und damit

$$\widehat{f}(k) = \prod_{i=1}^{d} \widehat{f}_i(k_i).$$

Daher genügt es sich (5.3) in einer Dimension zu Beweisen. Die Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ is Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u' + xu &= 0 \\ u(0) &= 1. \end{aligned}$$

Mit Lemma 5.3 c) und d) folgt, dass $\widehat{f}$ die selbe Differentialgleichung löst mit Startwert

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = 1.$$

Der Satz von Picard-Lindelöff zeigt $\widehat{f} = f$.
Mit Lemma 5.3 c) und d) sieht man

$$\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi) = (-1)^{|\beta|} i^{|\alpha|-|\beta|} \widehat{D^\alpha x^\beta} f(\xi)$$

so dass

$$|\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi)| = \|\widehat{D^\alpha x^\beta} f\|_\infty \leq c \|D^\alpha x^\beta f\|_1.$$

Die rechte Seite kann jetzt durch eine endliche Linearkombination von Seminormen beschränkt werden, D.h. $f_k \to 0$ in $\mathcal{S}$ impliziert $\widehat{f}_k \to 0$ in $\mathcal{S}$.

Mit Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g}\,dz &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-izx} g(x)\,dx\,dz \\
&= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-izx} g(x)\,dz\,dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ixz} f(z)\,dz\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g\,dz.
\end{aligned}$$

Für $g(x) = \lambda^{-d} f(\lambda^{-1}x)$ ist $\widehat{g}(k) = \widehat{f}(\lambda k)$, also

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(\lambda x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x) \lambda^{-d} g(\lambda^{-1}x)\,dx \\
\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda^{-1}x)\widehat{g}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x) g(\lambda^{-1}x)\,dx.
\end{aligned}$$

Gleichmäßige Konvergenz ergibt für $\lambda \to \infty$

$$f(0) \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}(x)\,dx = g(0) \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x)\,dx.$$

Wählen wir $g(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ erhalten wir wegen (5.3)

$$f(0) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(k)\,dk,$$

also (5.2) für $x = 0$. Eerstzen wir f durch die Abbildung $z \mapsto f(x+z)$ mit fixiertem x folgt

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx} \widehat{f}(k)\,dk$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. *Box*

Definition 5.4 *Für ein Element $T \in \mathcal{S}'$ definieren wir die Fourier-Transformierte als die get. Distribution $\widehat{T}$ mit*

$$\widehat{T}(f) = T(\widehat{f}), \qquad f \in \mathcal{S}.$$

Mit Satz 5.6 sieht man, dass die Fourier-Transformation $\widehat{T}$ stetig auf $\mathcal{S}$ ist und damit zu $\mathcal{S}'$ gehört. Wird T durch eine $L^1(\mathbb{R}^d)$-Funktion u_T erzeugt, so erhält man für $f \in \mathcal{S}$ mit (5.1)

$$\widehat{T}(f) = T(\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}^d} u_T \widehat{f}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{u}_T f\, dx,$$

d.h. $\widehat{T}$ entspricht der Fourier-Transformierten in ihrer ursprünglichen Definition.

Satz 5.8 *Die Fourier-Transformierte ist eine stetig-lineare Bijektion von $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ mit stetiger Inverser.*

Beweis.
Es gelte $T_n \to T$ in $\mathcal{S}'$, dann erhalten wir für alle $f \in \mathcal{S}$

$$\widehat{T_n}(f) = T_n(\widehat{f}) \to T(\widehat{f}) = \widehat{T}(f),$$

also die Stetigkeit. Aus (5.2) folgt, dass die Fourier-Transformation Periode vier hat (d.h. viermal angewendet ergbt sie die Idendität). Die Inverese der Fourier-Transformation ist also äquivalent zur dreifachen Anwendung, woraus invertierbarkeit und Stetigkeit der Inversen folgen. □

Wir wollen nun die Fourier-Transformierte für Funktionen $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, definieren. Wir betrachten

$$T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} f\phi\, dx, \qquad \phi \in \mathcal{S}.$$

Offensichtlich ist dieses Integral endlich. Die Stetigkeit von T_f sieht man wie folgt: es gelte $\phi_k \to 0$ in $\mathcal{S}$, dann ergibt sich mit der Hölder-Ungleichung

$$|T_f(\phi_k)| \leq \|f\|_p \|\phi_k\|_{p'},$$

wobei die rechte Seite gegen Null konvergiert.

Satz 5.9 *Die Fourier-Transformation ist eine Isometrie auf $L^2(\mathbb{R}^d)$, d.h. für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ist $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*

Beweis.
Wir setzen in (5.1) $g = \overline{\widehat{f}}$ und erhalten wegen $\widehat{g} = \overline{f}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \overline{f}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} \cdot \overline{\widehat{f}}\, dx \quad \Longleftrightarrow \quad \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

für alle $f \in \mathcal{S}$. Da $\mathcal{S}$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt, erhalten wir die Aussage auf ganz $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Bemerkung 5.10
- *Wir Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ erhält man die üblichen Formeln für die Fourier-Transformierte (5.1) und (5.2).*
- *Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $1 \le p \le 2$, so lässt sich immer noch zeigen, dass $\widehat{f}$ eine Funktion ist und es gilt*

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \le \|f\|_p.$$

Mit diesen Vorbereitungen sind wir jetzt in der Lage Sobolev-Räume $W^{\Theta,p}$ für $\Theta \notin \mathbb{N}$ zu definieren. Zunächst sei $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, wir wollen einen Zusammenhang zwischen der Norm von u und der Norm der Fourier-Transformierten $\mathcal{F}(u)$ herstellen. Nach Satz 5.9 ist

$$\begin{aligned}\|u\|_{1,2}^2 &= \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 = \|\mathcal{F}(u)\|_2^2 + \|\mathcal{F}(\nabla u)\|_2^2 = \|\mathcal{F}(u)\|_2^2 + \|ik\mathcal{F}(u)\|_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (1+|k|^2)|\widehat{u}|^2\, dk.\end{aligned}$$

Allgemeiner betrachten wir für $\Theta \in \mathbb{R}$ das Bessel-Potential

$$J^\Theta u(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big((1+|k|^2)^{-\frac{\Theta}{2}}\mathcal{F}(u)(k)\Big), \quad u \in \mathcal{S}.$$

Offenbar gilt $(J^\Theta)^{-1} = J^{-\Theta}$ sowie

$$\|u\|_{1,2} = \|(J^1)^{-1}u\|_2.$$

Definition 5.5 *Sei $\Theta \ge 0$ und $1 < p < \infty$. wir definieren*

$$\begin{aligned}L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d) &:= J^\Theta(L^p(\mathbb{R}^d)), \\ \|u\|_{\Theta,p} &:= \|(J^\Theta)^{-1}u\|_p.\end{aligned}$$

Die Definition ergibt zwar auch für $p = 1$ und $p = \infty$ Sinn, das folgende Resultat gilt aber im Grenzfall nicht mehr (vgl. [St] § 6.6).

Satz 5.12 *Sei $\Theta \in \mathbb{N}_0$ und $1 < p < \infty$, dann gilt*

$$L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d) = W^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$$

und die Normen sind äquivalent.

Der Beweis folgt im Wesentlichen aus dem folgenden Lemma (siehe [St])

Lemma 5.13 *Sei $\Theta \geq 1$ und $1 < p < \infty$. Dann gilt $u \in L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$ genau dann wenn $u \in L^{\Theta-1,p}(\mathbb{R}^d)$ und $\partial_j u \in L^{\Theta-1,p}(\mathbb{R}^d)$ für alle $j \in \{1, ..., d\}$ ist. Die Normen*

$$\|u\|_{\Theta,p}, \quad \|u\|_{\Theta-1,p} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u\|_{\Theta-1,p}$$

sind äquivalent.

Beweis von Satz 5.12.
Für $\Theta = 0$ ist $J^0 = \mathrm{id}$, so dass die Aussage trivial ist. Den Fall $\Theta = 1$ kann man mit Hilfe von Lemma 5.13 auf die Situation $\Theta = 0$ zurückführen. Der Rest folgt induktiv. □

Die wichtigsten Eigenschaften der Räume $L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$ sind im folgenden Satz zusammengefasst (vgl. [Ad], Thm. 7.63)

Satz 5.14 *Sei $\Theta \geq 0$ und $1 < p < \infty$, dann gilt*

a) $L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$ ist ein reflexiver Banachraum.

b) $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ liegt dicht in $L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$.

c) Es ist $[L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)]' \cong L^{-\Theta,p'}(\mathbb{R}^d)$.

d) für $\Theta_1 < \Theta_2$ ist die Einbettung $L^{\Theta_2,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^{\Theta_1,p}(\mathbb{R}^d)$ stetig.

e) Ist $\Theta_1 \leq \Theta_2$ und

$$\begin{aligned} 1 < p \leq q \leq \tfrac{dp}{d-(\Theta_2-\Theta_1)p} < \infty \qquad & \text{für } p > 1; \\ 1 \leq q < \tfrac{d}{d-\Theta_2+\Theta_1} < \infty \qquad & \text{für } p = 1; \end{aligned}$$

dann ist die Einbettung $L^{\Theta_2,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^{\Theta_1,q}(\mathbb{R}^d)$ stetig.

f) Für $0 \leq \mu \leq \Theta - \frac{d}{p} < 1$ gilt $L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d) \subset C^{0,\mu}(\mathbb{R}^d)$.

Bemerkung 5.15
- *Die Abbildung $J^\Theta : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$ ist ein Isomorphismus, so dass die Reflexivität der Räume : $L^p(\mathbb{R}^d)$ und $L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$ äquivalent ist (sofern man gezeigt hat, dass $L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$ ein Banachraum ist).*
- *Aussage d) zeigt, dass die Güte einer Funktion mit wachsender Differenzierbarkeitsstufe wächst, wie es zu erwarten ist bei einer sinnvollen Definition.*

- *e) und f) sind Sobolev-Einbettungen für fraktionale Sobolev-Räume. Ist $\Theta \in \mathbb{N}$, so erhält man die uns bekannten Aussagen aus Kapitel 3.*

Ebenfalls in der Literatur weit verbreitet ist die folgende Definition für fraktionale Sobolev-Räume. Man definiert für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\|u\|_{\Theta,p}^{\sim} := \left\{ \|u\|_{m,p}^p + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{d+\sigma p}} \, dx \, dy \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{5.4}$$

für $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$ mit $\Theta = m + \sigma$ für $\sigma \in (0,1)$. Der Raum $\widetilde{L}^{\Theta,p}(\Omega)$ ist dann definiert als Menge aller messsbaren Funktionen für die obige Norm endlich ist. Es lässt sich zeigen

- Für $\Theta \in \mathbb{N}_0$ erhält man die gewöhnlichen Sobolev-Räume.
- Für $\epsilon > 0$ und alle Θ gilt
$$\widetilde{L}^{\Theta+\epsilon,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d) \subset \widetilde{L}^{\Theta-\epsilon,p}(\mathbb{R}^d).$$
- Die Aussagen aus Satz 5.14 gelten auch für die Räume $\widetilde{L}^{\Theta,p}(\Omega)$, falls $\partial\Omega$ vernünftig ist.

Der Vorteil in der Definition (5.4) ist, dass als Menge nicht unbedingt der gesamte $\mathbb{R}^d$ benötigt wird.

Als letztes Resultat besprechen wir eine Version des Lemmas über den Zusammenhang zwischen schwacher Differenzierbarkeit und Differenzenquotienten (vgl. [Ad]).

Lemma 5.16 *Sei $u \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$ und es gelte für $\beta \in (0,1]$, $M > 0$,*

$$\sum_{\gamma=1}^{d} \int_\omega |\Delta_h^\gamma u|^p \, dx \leq c(\omega)|h|^{p\beta-p}$$

für alle $h < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$ und alle $\omega \Subset \Omega$ dann gilt $u \in \widetilde{L}^{\Theta,p}_{loc}(\Omega)$ für alle $\Theta \in (0,\beta)$.

§ 6. Regularitätstheorie für Variationsprobleme mit quadratischem Wachstum

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Minimierern von Variationsproblemen der Form

$$J[u] := \int_\Omega F(\nabla u)\, dx,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt ist und $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion ist, die der Bedingung

$$\lambda |P|^2 \le D^2 F(Z)(P,P) \le \Lambda |P|^2 \tag{6.1}$$

für alle $P, Z \in \mathbb{R}^d$ genügt mit positiven Konstanten λ, Λ. Wie wir bereits wissen können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $F(0) = 0$ und $DF(0) = 0$ gilt (vgl. A 7). Es folgt wegen

$$\begin{aligned} DF(Z) &= \int_0^1 D^2 F(tZ)(Z,\cdot)\, dt, \\ F(Z) &= \int_0^1 \int_0^1 D^2 F(stZ)(Z,Z)\, ds\, dt \end{aligned}$$

leicht

$$\begin{aligned} |DF(Z)| &\le \Lambda |Z|, \\ \lambda |Z|^2 \le F(Z) &\le \Lambda |Z|^2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Offenbar ist also $W^{1,2}(\Omega)$ der geeignete Lösungsraum und, bei Vorgabe von Randwerten, lässt sich mit der direkten Methode der Variationsrechnungn (vgl. GdV) relativ einfach die Existenz einer eindeutigen Lösung zeigen.
Das einfachste Besipiel für eine passende Integrandenfunktion ist

$$F(Z) = |Z|^2. \tag{6.3}$$

In diesem Spezialfall sind Minimierer schwache Lösungen der Laplace-Gleichung (vg. A 6 und 7) und gehören zur Klasse $C^\infty(\Omega)$. Die Regularitätsfrage ist hier also bereits geklärt. Allgemeiner können wir

$$F(Z) := \int_0^{|Z|} \int_0^s \Theta(\tau)\, d\tau\, ds$$

betrachten mit einer Funktion stetigen Θ, die der Bedingung

$$0 < \inf_{[0,\infty)} \Theta \leq \sup_{[0,\infty)} \Theta < \infty$$

genügt. Die Annahme (6.1) lässt sich leicht nachrechnen. Ist Θ nicht konstant, so erhalten wir eine nichtlineare PDG als Eulergleichung. Die Regulatiätstheorie wird dadurch um ein Vielfaches schwieriger. In diesem Kapitel werden wir die folgenden Regularitätsaussagen herleiten:

- Schwache Differenzierbarkeit: Minimierer gehören zur Klasse $W^{2,2}_{loc}(\Omega)$;
- Volle Regularität für $d = 2$: Minimierer ghören zur Klasse $C^{1,\alpha}(\Omega)$ für alle $\alpha < 1$;
- Partialle Regularität: Es existiert eine offene Menge $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $C^{1,\alpha}(\Omega_0)$ für alle $\alpha < 1$ und die „singuläre Menge“ $\Omega - \Omega_0$ ist klein, d.h. zumindest $\mathcal{L}^d(\Omega - \Omega_0) = 0$.

Bemerkung 6.1 *a) Die Theorie dieses Kapitels lässt sich komplett auf vetorwertige Minimierer $u : \Omega \to \mathbb{R}^D$ mit $D \geq 2$ übertragen.*

b) Die Aussagen zur partiellen Regularität lassen sich noch verbessern. Die Beweise hierzu würden jedoch den Rahmen der Vorlesung sprengen. Ist $D = 1$ so ist $\Omega_0 = \Omega$, also $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Die Technik lässt sich jedoch nicht auf den vektorwertigen Fall übertragen. Hier erhält man volle Regularität nur unter der Zusatzbedingung

$$F(Z) = g(|Z|)$$

mit einer Funktion $g \in C^2[0, \infty)$.

Satz 6.2 *Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ein Minimierer, d.h.*

$$J[u] \leq J[v] \quad \textit{falls } u - v \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega).$$

Dann gilt $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$

Bemerkung 6.3 *Mit dem Satz von Sobolev (Satz 3.4) folgt aus Satz 6.2 für $d = 2$ $\nabla u \in L^t_{loc}(\Omega)$ für alle $t < \infty$, sowie $u \in C^0(\Omega)$. Für $d = 3$ gilt immerhin $\nabla u \in L^6_{loc}(\Omega)$.*

Beweis.
u ist Lösung der Eulergleichung (vgl. A 7):

$$\int_\Omega DF(\nabla u) \cdot \nabla\phi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega).$$

Der Beweis folgt durch Differenzenquotiententechnik; wir wählen die Testfunktion $\phi = \Delta_{-h}(\eta^2 \Delta_h u)$. Es gelte $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ und für eine Kugel $B \Subset \Omega$ sei $\eta \equiv 1$ auf B und $0 \le \eta \le 1$. Es folgt für h genügend klein

$$\int_\Omega \eta^2 \Delta_h \{DF(\nabla u)\} \cdot \Delta_h \nabla u \, dx = -\int_\Omega \Delta_h \{DF(\nabla u)\} \cdot \nabla\eta^2 \Delta_h u \, dx. \tag{6.4}$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned}\Delta_h \{DF(\nabla u)\}(x) &= \frac{1}{h}\{DF(\nabla u(x + he_\gamma)) - DF(\nabla u(x))\} \\ &= \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{dt} DF(\nabla u(x) + th\Delta_h(u)(x)) \, dt \\ &= \int_0^1 D^2F(\nabla u(x) + th\Delta_h \nabla u(x)) \, dt (\Delta_h \nabla u, \cdot) \\ &=: B_x(\Delta_h \nabla u, \cdot).\end{aligned}$$

Damit liest sich (6.4) als

$$I := \int_\Omega \eta^2 B_x(\Delta_h \nabla u, \Delta_h \nabla u) \, dx = -2\int_\Omega \eta B_x(\Delta_h \nabla u, \Delta_h u \nabla\eta) \, dx =: -II. \tag{6.5}$$

Wegen (6.1) erhalten wir

$$I \ge \lambda \int_\Omega \eta^2 |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx \ge \lambda \int_B |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für die Bilinearform B_x und der Youngschen Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}|II| &\le 2\int_\Omega \eta \sqrt{B_x(\Delta_h \nabla u, \Delta_h \nabla u)} \sqrt{B_x(\Delta_h u \nabla\eta, \Delta_h u \nabla\eta)} \\ &\le 2\tau \int_\Omega \eta^2 B_x(\Delta_h \nabla u, \Delta_h \nabla u) \, dx + \frac{2}{\tau}\int_\Omega B_x(\Delta_h u \nabla\eta, \Delta_h u \nabla\eta) \, dx\end{aligned}$$

für alle $\tau > 0$. Wählen wir $\tau = \frac{1}{4}$, so folgt mit (6.1)

$$\begin{aligned}\int_B |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx &\le c \int_\Omega B_x(\Delta_h u \nabla\eta, \Delta_h u \nabla\eta) \, dx \\ &\le c \int_\Omega |\Delta_h u \nabla\eta|^2 \, dx \le c(\eta) \int_{\mathrm{spt}(\eta)} |\Delta_h u|^2 \, dx \\ &\le c(\eta) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx,\end{aligned}$$

falls $\mathrm{spt}(\eta)^h \subset \Omega$ ist. Die Konstante c kann sich dabei von Zeile zu Zeile ändern, bleibt aber unabhängig von h. Satz 2.7 ergibt aus der uniformen Beschränktheit des Differenzenquationten $\partial_\gamma \nabla u \in L^2_{loc}(B, \mathbb{R}^d)$ und mit der Beliebigkeit von $B \Subset \Omega$ und $\gamma \in \{1, ..., d\}$ folgt $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$. □

Bevor wir weitere Regularitätsaussagen beweisen, benötigen wir folgendes nützliches Lemma

Lemma 6.4 *Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ein Minimierer von J. Dann ist u Lösung der Gleichung*

$$\int_\Omega D^2F(\nabla u)(\partial_\gamma \nabla u, \nabla\phi) \, dx = 0 \quad \textit{für alle } \phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \tag{6.6}$$

mit $\mathrm{spt}(\phi) \Subset \Omega$. *Dabei ist $\gamma \in \{1, ..., d\}$ beliebig.*

Bei (6.6) handelt es sich aufgrund der Annahme (6.1) um eine elliptische PDG, so dass wir uns der entsprechenden Theorie bedienen dürfen (vgl. Vorlesung PDG II oder [GT]).

Beweis.
u ist Lösung der Eulergleichung (vgl. A 7):

$$\int_\Omega DF(\nabla u) \cdot \nabla\phi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega).$$

Gilt jetzt $\mathrm{spt}(\phi) \Subset \Omega$, so ist mit ϕ auch $\Delta_{-h}(\Delta_h \phi)$ zulässig, falls $h \ll 1$. Wir erhalten wie im Beweis von Satz 6.2 mit

$$B_x(\Delta_h \nabla u, \cdot) := \int_0^1 D^2F(\nabla u(x) + th\Delta_h \nabla u(x)) \, dt(\Delta_h \nabla u, \cdot) = \Delta_h \{DF(\nabla u)\}$$

die Gleichung

$$\int_\Omega B_x(\Delta_h \nabla u, \nabla\phi) \, dx = 0. \tag{6.7}$$

DF gehört zur Klasse C^1 mit beschränkter Ableitung (vgl. (6.1)) wir können also die Kettenregel (Satz 2.1 b)) benutzen und es folgt wegen $\nabla u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ (vgl. Satz 6.2)

$$DF(\nabla u) \in W^{1,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Daher haben wir die Konvergenz

$$B_x(\Delta_h \nabla u, \cdot) \to \partial_\gamma \{DF(\nabla u)\} = D^2F(\nabla u)(\partial_\gamma \nabla u, \cdot) \quad \text{in } L^2_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Da $\nabla \phi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $\operatorname{spt}(\phi) \Subset \Omega$ ergibt sich bei $h \to 0$ aus (6.7)

$$\int_\Omega D^2F(\nabla u)(\partial_\gamma \nabla u, \nabla \phi)\, dx = 0.$$

Der folgende Satz zeigt bereits, dass für $d = 2$ Minimerer zur Klasse C^1 gehören.

Satz 6.5 *Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ein Minimerer. Dann gilt*

a) u gehört zur Klasse $W^{2,2+\epsilon}_{loc}(\Omega)$ für ein $\epsilon > 0$.

b) Ist $d = 2$ so gilt $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ für alle $\alpha < 1$.

Bemerkung 6.6 *Im Allgemeinen scheint die Aussage in Teil a) wenig Hilfreich, da wir nicht wissen wie groß ϵ ist. Für $d = 2$ genügt es jedoch um zum Ziel zu kommen.*

Bevor wir zum Beweis kommen, benötigen noch zwei Hilfsaussagen.

Lemma 6.7 (Gehring-Lemma) *Es sei $g \in L^q(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt sowie $1 < q < \infty$. Es gelte*

$$\fint_{B_r} g^q\, dx \le C \left(\fint_{B_{2r}} g\, dx \right)^q \tag{6.8}$$

für alle Kugeln $B_{2r} \Subset \Omega$. Dann gibt es ein $\epsilon = \epsilon(d, C, p)$ mit $g \in L^t_{loc}(\Omega)$ für alle $t \in [q, q + \epsilon)$.

Einen Beweis findet man zum Beispiel in [Gia 1]. Man beachte, dass die umgekehrte Ungleichung aus der Ungleichung von Hölder folgt:

$$\begin{aligned}
\fint_{B_r} g\,dx &= \frac{1}{\mathcal{L}^d(B_r)}\int_B g\,dx \le \frac{1}{\mathcal{L}^d(B_r)}\left(\int_{B_r} g^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{B_r} 1\,dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&= \mathcal{L}^d(B_r)^{-1+1-\frac{1}{q}}\left(\int_{B_r} g^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = \mathcal{L}^d(B_r)^{-\frac{1}{q}}\left(\int_{B_r} g^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\fint_{B_r} g^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Allerdings haben wir hier auf beiden Seiten denselben Radius.

Die folgende Aussage wird in der Vorlesung PDG II bewiesen (siehe auch [GT] Kapitel 8)

Lemma 6.8 *Sei $\mathcal{A} \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{(d\times D)^2})$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt eine Bilineaform auf $\mathbb{R}^{d\times D}$ und es gelte*

$$\mathcal{A}(x)(P,P) \ge \lambda |P|^2$$

für alle $P \in \mathbb{R}^{d\times D}$ und alle $x \in \Omega$ mit $\lambda > 0$. Es sei $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^D)$ Lösung von

$$\int_\Omega \mathcal{A}(\nabla u, \nabla \Phi)\,dx = 0 \quad \textit{für alle } \Phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)^D.$$

Dann gehört u zur Klasse $C^{0,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^D)$ für alle $\alpha < 1$.

Falls $D = 1$ is gelten bessere Aussagen. Unsere Argumentation soll jedoch allgemeiner bleiben. Insbesondere sind für physikalische Anwendungen die Situationen $d = D = 2$ und $d = D = 3$ interessant. Als Spezialfall erhält man falls $\mathcal{A} = I$ schwache (vektorwertige) Lösungen der Laplace-Gleichung.

Beweis von Satz 6.5.
Wir wollen Lemma 6.7 auf die Funktion $|\nabla^2 u|$ anwenden. Man benutze Lemma 6.4 für die Funktion $\phi = \eta^2[\partial_\gamma u - P_\gamma]$ mit $\eta \in C_0^\infty(B_{2r})$ $0 \le \eta \le 1$ und $\eta = 1$ auf B_r sowie $|\nabla\eta| \le \frac{c}{r}$; $P = (P_\gamma) \in \mathbb{R}^d$ sei ein (noch beliebiger) Vektor. Offenbar gilt $\phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ nach Satz 6.2 und $\operatorname{spt}(\phi) \Subset \Omega$. Es folgt

$$\int_\Omega \eta^2 D^2F(\nabla u)(\partial_\gamma \nabla u, \partial_\gamma \nabla u)\,dx = -\int_\Omega D^2F(\nabla u)(\partial_\gamma \nabla u, \nabla\eta^2[u_\gamma - P_\gamma])\,dx$$

und mit (6.1) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{B_r} |\nabla^2 u|^2 \, dx &= \lambda \sum_{\gamma=1}^{d} \int_{B_r} |\partial_\gamma \nabla u|^2 \, dx \\
&\leq \sum_{\gamma=1}^{d} \Lambda \int_{\Omega} |\partial_\gamma \nabla u| 2\eta |\nabla \eta| |u_\gamma - P_\gamma| \, dx \\
&\leq \frac{c}{r} \int_{B_{2r}} |\nabla^2 u| |\nabla u - P| \, dx.
\end{aligned}$$

Wir benötigen im Folgenden einen Exponenten $p \in (1,2)$ mit

$$s(p) = p' \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{2d}{d+1}.$$

Anwendung der Hölder-Ungleichung mit p liefert

$$\int_{B_{2r}} |\nabla^2 u| |\nabla u - P| \, dx \leq \left(\int_{B_{2r}} |\nabla^2 u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{2r}} |\nabla u - P|^{s(p)} \right)^{\frac{1}{s(p)}}.$$

Wir wählen jetzt $P = (\nabla u)_{B_{2r}}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{B_{2r}} |\nabla u - P|^{s(p)} \right)^{\frac{1}{s(p)}} = \left(\int_{B_{2r}} |\nabla u - (\nabla u)_{B_{2r}}|^{s(p)} \right)^{\frac{1}{s(p)}} \\
&\leq c \left(\int_{B_{2r}} |\nabla^2 u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

wobei wir die Sobolev-Poincaré-Ungleichung benutzt haben (vgl. A 8). Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \int_{B_r} |\nabla^2 u|^2 \, dx \leq \frac{c}{r} \left(\int_{B_{2r}} |\nabla^2 u|^p \, dx \right)^{\frac{2}{p}} \\
\Longleftrightarrow \quad & \int_{B_r} (|\nabla^2 u|^p)^{\frac{2}{p}} \, dx \leq \frac{c}{r} \left(\int_{B_{2r}} |\nabla^2 u|^p \, dx \right)^{\frac{2}{p}} \\
\Longleftrightarrow \quad & \fint_{B_r} (|\nabla^2 u|^p)^{\frac{2}{p}} \, dx \leq c \left(\fint_{B_{2r}} |\nabla^2 u|^p \, dx \right)^{\frac{2}{p}}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Man beachte dabei

$$r^{-(d+1)} = \left(r^{-\frac{(d+1)p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}} = \left(r^{-d} \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Nun benutzen wir das Lemma von Gehring für $g := |\nabla^2 u|^p$ und $q := \frac{2}{p}$. Betrachten wir $\omega \Subset \Omega$ beliebig, so ist nach Satz 6.2 $g \in L^q(\omega)$ und wir haben in (6.9) die gewünschte Ungleichung, es folgt $\nabla^2 u \in L^{2+\epsilon}_{loc}(\omega)$ für ein $\epsilon > 0$. Der Satz von Sobolev (Satz 3.4, z.B. für Kugeln) ergibt wegen der Beliebigkeit von ω die Behauptung von Teil a).
Ist $d = 2$, so erhalten wir mit Sobolev $\nabla u \in C^0(\Omega)$. Außerdem ist $\partial_\gamma u \in W^{1,2}(\omega)$ und erfüllt

$$\int_\omega D^2 F(\nabla u)(\partial_\gamma \nabla u, \nabla \phi)\, dx = 0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega),$$

mit $\gamma \in \{1, ..., d\}$. Bei $D^2F(\nabla u)$ handelt es sich um eine Bilinearform bestehend aus stetigen Koeffizienten mit

$$D^2 F(\nabla u)(P, P) \geq \lambda |P|^2$$

für alle $P \in \mathbb{R}^d$. Aus Lemma 6.8 folgt $\partial_\gamma u \in C^{0,\alpha}(\omega)$ und damit $\nabla u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ für alle $\alpha < 1$. □

Im folgenden wollen wir Probleme in belieber Dimension d studieren (wobei das Hauptinteresse für Anwendungen der Fall $d = 3$ ist). In dieser Situation lässt sich im Allgemeinen keine volle Regulariät (d.h. $u \in C^1(\Omega)$) zeigen. Wir betrachten die Menge

$$\begin{aligned} \Omega_0 &:= \left\{ x \in \Omega : \limsup_{r \to 0} |(\nabla u)_{x,r}| < \infty \text{ und } \liminf_{r \to 0} E(x, r) = 0 \right\}; \\ E(x, r) &:= \fint_{B_r(x)} |\nabla u - (\nabla u)_{x,r}|^2\, dz. \end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst

Lemma 6.9 *a) Sei $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$, dann ist $\mathcal{L}^d(\Omega - \Omega_0) = 0$.*

b) Sei $u \in W^{2,2+\epsilon}_{loc}(\Omega)$ für ein $\epsilon > 0$, dann ist $\mathcal{H}^{d-2}(\Omega - \Omega_0) = 0$.

Bemerkung 6.10 *a) Man beachte, dass die Aussagen von Lemma 6.9 unabhängig davon sind, dass u ein Variationsintegral minimiert. Später zeigen wir $u \in C^1(\Omega_0)$, was partieller Regularität entspricht.*

b) Für (nichtganze) Exponenten $s \in [0, \infty)$ definiert man

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(A_k)}{2} \right)^s ;\ A \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k,\ A_k \subset \mathbb{R}^d,\ \operatorname{diam}(A_k) \leq \delta \right\}.$$

Dabei ist $\alpha(s) := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$ *mit Gammafunktion* Γ. *Weiter ist dann*

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta>0}\mathcal{H}^s_\delta(A)$$

das s-dimensionales Hausdorff-Maß.

Die entscheidende Aussage zum Beweis der partiellen Regularität ist das sogeante Blow-up Lemma:

LEMMA 6.1 *Gegeben sei eine positive Zahl L. Die Konstante* C_* *wird nach (6.23) definiert. Dann existiert für jedes* $\tau \in (0,1)$ *ein* $\epsilon = \epsilon(\tau, L) > 0$ *so dass aus*

$$|(\nabla u)_{x,r}| \le L \text{ und } E(x,r) \le \epsilon \tag{6.10}$$

für eine Kugel $B_r(x) \Subset \Omega$ *die folgende Ungleichung impliziert wird:*

$$E(x,\tau r) \le C_*\tau^2 E(x,r). \tag{6.11}$$

Für einen beliebigen Punkt $x_0 \in \Omega_0$ und einen genügend kleinen Radius r sind nun gerade die Voraussetzungen dieses Lemmas erfüllt. Dies werden wir später zum Beweis der partiellen Regularität nutzen. Mit Hilfe von LEMMA 6.1 zeigen wir später

$$\fint_{B_r(y)} |\nabla u - (\nabla u)_{y,r}|^2\,dz \le cr^\alpha \quad \text{für alle } r \le R_0$$

und alle $y \in B_\rho(x)$, wobei $x \in \Omega_0$ liegt.

Lemma 6.10 (Morrey) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen und beschränkt und* $v \in L^p(\Omega)$. *Gilt*

$$\fint_{B_r(y)} |v - (v)_{y,r}|^p\,dz \le cr^\alpha$$

für alle Kugeln $B_r(y) \Subset \Omega$ *mit c unabhängig von y und r, so folgt* $u \in C^{0,\frac{\alpha}{p}}(\Omega)$.

Die Aussage wird in der Vorlesung PDG II bewiesen, siehe auch [GT].

Bevor wir zum Beweis von Lemma 6.1 kommen benötigen wir die folgende Hilfsaussage für Lösungen elliptischer Systeme mit konstanten Koefizienten (vgl PDG II oder [Gia 1])

Lemma 6.11 *Sei $\mathcal{A}$ eine Bilineaform auf $\mathbb{R}^{d\times D}$ mit konstanten Koeffizienten und es gelte*

$$\mathcal{A}(P,P) \geq \lambda |P|^2$$

für alle $P \in \mathbb{R}^{d\times D}$ mit $\lambda > 0$. Es sei $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^D)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt) Lösung von

$$\int_\Omega \mathcal{A}(\nabla u, \nabla \Phi)\, dx = 0 \quad \textit{für alle } \Phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)^D.$$

Dann gehört u zur Klasse $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^D)$ und erfüllt

$$⨍_{B_r} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2\, dz \leq c \left(\frac{r}{R}\right)^2 ⨍_{B_R} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2\, dz$$

für alle $0 < r \leq R$ mit $B_R \Subset \Omega$.

Beweis von LEMMA 6.1.

Wir beweisen Lemma 6.1 durch Widerspruch. Nehmen wir also an, die Aussage des Lemmas sei falsch. Für ein fixiertes $L > 0$ gibt es dann ein $\tau \in (0,1)$, so dass eine Folge von Kugeln $B_{r_m}(x_m) \Subset \Omega$ existiert mit:

$$|(\nabla u)_{x_m, r_m}| \leq L, \; E(x_m, r_m) =: \lambda_m^2 \to 0 \tag{6.12}$$

bei $m \to \infty$, aber

$$E(x_m, \tau r_m) > C_* \tau^2 \lambda_m^2. \tag{6.13}$$

Wir führen skalierte Funktionenfolgen ein ($z \in B_1 := B_1(0)$):

$$u_m(z) := \frac{1}{\lambda_m r_m} \left(u(x_m + r_m z) - (u)_{x_m, r_m} - r_m (\nabla u)_{x_m, r_m} z\right). \tag{6.14}$$

Wir werden nun wie folgt vorgehen:

i) Zunächst leiten wir aus (6.13) eine Ungleichung für die Folge (∇u_m) her, die wir später zum Widerspruch führen.

ii) Wir beweisen die schwache Konvergenz von (u_m) in $W^{1,2}$ (nach Übergang zu Teilfolgen).

iii) Wir leiten eine Differentialgleichung für den schwachen Limes $\overline{u}$ von u_m her, so dass Lemma 6.11 anwendbar wird.

iv) Mit dieser Kenntnis beweisen wir eine Ungleichung, die den gewünschten Widerspruch zur in Punkt 1 erwähnten Ungleichung liefert, sobald wir gezeigt haben, dass die Folgen (∇u_m) lokal stark konvergiert.

v) Im letzten Schritt wird die lokal starke Konvergenz von (u_m) in $W^{1,2}(B_1)$ gezeigt.

Schritt i)

Es gilt

$$\nabla u_m(z) = \frac{1}{\lambda_m}\left(u(x_m + r_m z) - (\nabla u)_{x_m,r_m}\right),$$

woraus durch Transformation

$$(\nabla u_m)_{0,1} = 0$$

folgt. Ebenso sieht man

$$(u_m)_{0,1} = 0.$$

Außerdem erhalten wir

$$\begin{aligned} E(x_m, \tau r_m) &= \fint_{B_{\tau r_m}(x_m)} |\nabla u(z) - (\nabla u)_{x_m,\tau r_m}|^2\, dz \\ &= \fint_{B_\tau} |\nabla u(x_m + r_m z) - (\nabla u)_{x_m,\tau r_m}|^2\, dz \\ &= \fint_{B_\tau} |\lambda_m \nabla u_m(z) + (\nabla u)_{x_m,r_m} - (\nabla u)_{x_m,\tau r_m}|^2\, dz. \end{aligned}$$

Wegen

$$(\nabla u)_{x_m,\tau r_m} = \fint_{B_{\tau r_m}(x_m)} \nabla u(z)\, dz = \fint_{B_\tau} \nabla u(x_m + r_m z)\, dz = \lambda_m (\nabla u_m)_{0,\tau} + (\nabla u)_{x_m,r_m}$$

ergibt sich

$$E(x_m, \tau r_m) = \lambda_m^2 \fint_{B_\tau} |\nabla u_m(z) - (\nabla u)_{0,\tau}|^2\, dz.$$

Aus (6.13) ergibt sich

$$\fint_{B_\tau} |\nabla u_m(z) - (\nabla u)_{0,\tau}|^2\, dz > C_* \tau^2. \tag{6.15}$$

Schritt ii)

Aus (6.12) ergibt sich zunächst für $A_m := (\nabla u)_{x_m,r_m}$ nach Teilfolgenwahl

$$A_m \to: A \quad \text{bei } k \to \infty \tag{6.16}$$

Außderm folgt

$$\fint_{B_1} |\nabla u_m(z)|^2 \, dz = 1, \tag{6.17}$$

die Poincaré-Ungleichung liefert wegen $(u_m)_{0,1} = 0$ die Beschränktheit von (u_m) in $W^{1,2}(B_1)$ und es folgt (nach Teilfolgenwahl)

$$\begin{aligned} u_m &\rightharpoonup: \overline{u} \quad \text{in } W^{1,2}(B_1) \\ \lambda_m u_m &\to 0 \quad \text{in } W^{1,2}(B_1) \text{ und f.ü. auf } B_1 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Schritt iii)

Grenzgleichung: Der schwache Limes $\overline{u}$ erfüllt die Gleichung

$$\int_{B_1} D^2F(A)\,(\nabla\overline{u}, \nabla\varphi)\; dz = 0 \text{ für alle } \varphi \in \mathring{W}^{1,2}(B_1). \tag{6.19}$$

Beweis: Da u lokales Minimum ist, gilt

$$\int_\Omega DF(\nabla u) : \nabla\psi \, dz = 0 \text{ für alle } \psi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$$

und nach Skalierung folgt (man wähle $\operatorname{spt}(\psi) \subset B_{r_m}(x_m)$ und $\varphi(z) := \psi(x_m + r_m z)$)

$$\int_{B_1} DF(A_m + \lambda_m \nabla u_m) : \nabla\varphi \, dz = 0 \text{ für alle } \varphi \in \mathring{W}^{1,2}(B_1).$$

Dies lässt sich nach dem Satz von Gauß umschreiben zu

$$\int_{B_1} \frac{1}{\lambda_m}\big[DF(A_m + \lambda_m\nabla u_m) - DF(A_m)\big] : \nabla\varphi \, dz = 0$$

oder äquivalent dazu als

$$\int_{B_1}\int_0^1 D^2F(A_m + s\lambda_m\nabla u_m)(\nabla u_m, \nabla\varphi)\, dsdz = 0.$$

Der letzte Ausdruck ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} &\int_{B_1} D^2F(A_m)(\nabla u_m, \nabla\varphi)\, dz \\ &= -\int_{B_1}\int_0^1 \left[D^2F(A_m + s\lambda_m\nabla u_m) - D^2F(A_m)\right](\nabla u_m, \nabla\varphi)\, dsdz. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Grenzübergang auf beiden Seiten in (6.20) liefert die Behauptung. Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Bilinearformen erhalten wir für die linke Seite

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{B_1} D^2F(A_m)(\nabla u_m, \nabla\varphi)dz - \int_{B_1} D^2F(A)(\nabla \overline{u}, \nabla\varphi)\, dz \right| \\
&\leq \left|D^2F(A_m) - D^2F(A)\right| \|\nabla u_m\|_{L^2(B_1)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(B_1)} \\
&+ \left| \int_{B_1} D^2F(A)(\nabla u_m - \nabla\overline{u}, \nabla\varphi)\, dz \right|,
\end{aligned}$$

was wegen (6.16) und (6.18) für $m \to \infty$ gegen Null konvergiert. Für die rechte Seite von (6.20) fixieren wir zunächst ein $\epsilon > 0$ und erhalten nach Egorov (siehe z.B. [Al], A 1.17) eine messbare Teilmenge A von B_1 mit $\lambda_m \nabla u_m \to 0$ gleichmäßig auf A und $\mathcal{L}^n(B_1 - S) \leq \epsilon$ (hierzu ist Konvergenz f.ü. nötig, siehe (6.18)). Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\left| \int_S \int_0^1 \left[D^2F(A_m + s\lambda_m\nabla u_m) - D^2F(A_m)\right] (\nabla u_m, \nabla\varphi) ds dz \right| \\
&\leq \sup_{S\times[0,1]} |[...]| \, \|\nabla u_m\|_{L^2(B_1)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(B_1)} \\
&\to 0 \text{ bei } m \to \infty,
\end{aligned}$$

wobei wir die Beschränktheit von ∇u_m in $L^2(B_1, \mathbb{R}^d)$ (siehe (6.18)) und die Stetigkeit von D^2F benutzt haben. Andererseits erhalten wir für das Integral über $B_1 - S$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
T := \Big| \int_{B_1 - S} \int_0^1 [...]\, (\nabla u_m, \nabla\varphi)\, ds dz \Big| &\leq c \int_{B_1-S} |\nabla u_m||\nabla\varphi|\, dz \\
&\leq c(\varphi)\, \|\nabla u_m\|_{L^2(B_1)} \mathcal{L}^d(B_1 - S)^{\frac{1}{2}} \leq c(\varphi)\sqrt{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir (6.1) und (6.18) benutzt. Es folgt

$$\limsup_m \left| \int_S \int_0^1 \left[D^2F(A_m + s\lambda_m\nabla u_m) - D^2F(A_m)\right] (\nabla u_m, \nabla\varphi) ds dz \right| \leq c(\varphi)\sqrt{\epsilon},$$

was wegen der Beliebigkeit von ϵ (6.19) ergibt.

Schritt iv)

Da es sich bei (6.19) um ein elliptisches System mit konstanten Koeffizienten können wir Lemma 6.11 anwenden:

$$⨍_{B_\tau} \left|\nabla\overline{u} - (\nabla\overline{u})_{0,\tau}\right|^2 dz \leq C^* \tau^2 ⨍_{B_1} \left|\nabla\overline{u} - (\nabla\overline{u})_{0,1}\right|^2 dz \tag{6.21}$$

mit einer Konstanten $C^* = C^*(\lambda, \Lambda)$. Weiterhin gilt $(\nabla \overline{u})_{0,1} = 0$ und (vgl. GdV Beweis von Satz 8.13)

$$\text{aus} \quad \fint_{B_1} |\nabla u_m|^2\, dz \le 1 \quad \text{folgt} \quad \fint_{B_1} |\nabla \overline{u}|^2\, dz \le 1, \tag{6.22}$$

aus schwacher Unterhalbstetigkeit wegen (6.18), so dass wir aus (6.21) die Ungleichung

$$\fint_{B_\tau} |\nabla \overline{u} - (\nabla \overline{u})_{0,\tau}|^2\, dz \le C^* \tau^2 \tag{6.23}$$

erhalten. Setzen wir jetzt $C_* = 2C^*$, so haben wir einen Widerspruch zu (6.15) falls wir die folgenden starken Konvergenz zeigen können (nach erneutem Übergang zu Teilfolgen):

$$\nabla u_m \to \nabla \overline{u} \text{ in } L^2_{loc}(B_1, \mathbb{R}^d) \tag{6.24}$$

Mit dieser Information konvergiert die linke Seite von (6.15) gegen die linke Seite von (6.23):

$$\fint_{B_\tau} |\nabla \overline{u} - (\nabla \overline{u})_{0,\tau}|^2\, dz = \lim_m \fint_{B_\tau} |\nabla u_m(z) - (\nabla u_m)_{0,\tau}|^2\, dz \ge C_* \tau^2 = 2C^* \tau^2,$$

offenbar ein Widerspruch zu (6.23).

Schritt v)

Zu zeigen bleibt (6.24): Von Lemma 6.4 wissen wir

$$\int_\Omega D^2F(\nabla u)(\partial_\gamma \nabla u, \nabla \psi)\, dx = 0$$

für alle $\psi \in \mathring{W}^{1,2}(B_{r_m}(x_m))$, da $B_{r_m}(x_m) \Subset \Omega$. Sei $\tilde{\eta} \in C_0^\infty(B_{r_m}(x_m))$ mit $0 \le \eta \le 1$, so ist die Wahl $\psi = \tilde{\eta}^2(\partial_\gamma u - P_\gamma)$, $P = (P_\gamma) \in \mathbb{R}^d$, zulässig und es folgt

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{B_{r_m}(x_m)} \tilde{\eta}^2 D^2F(\nabla u)(\partial_\gamma \nabla u, \partial_\gamma \nabla u)\, dz = -2 \int\limits_{B_{r_m}(x_m)} \tilde{\eta} D^2F(\nabla u)(\partial_\gamma \nabla u, [\partial_\gamma u - P_\gamma] \nabla \tilde{\eta})\, dz \\
&\le 2 \int\limits_{B_{r_m}(x_m)} \sqrt{\tilde{\eta}^2 D^2F(\nabla u)(\partial_\gamma \nabla u, \partial_\gamma \nabla u)} \sqrt{D^2F(\nabla u)([\partial_\gamma u - P_\gamma] \nabla \tilde{\eta}, [\partial_\gamma u - P_\gamma] \nabla \tilde{\eta})}\, dz \\
&\le \left(\int\limits_{B_{r_m}(x_m)} \tilde{\eta}^2 D^2F(\nabla u)(\partial_\gamma \nabla u, \partial_\gamma \nabla u)\, dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{B_{r_m}(x_m)} D^2F(\nabla u)([\partial_\gamma u - P_\gamma] \nabla \tilde{\eta}, [\partial_\gamma u - P_\gamma] \nabla \tilde{\eta})\, dz \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$\int\limits_{B_{r_m}(x_m)} \tilde{\eta}^2 D^2F(\nabla u)(\partial_\gamma \nabla u, \partial_\gamma \nabla u)\, dz \leq \int\limits_{B_{r_m}(x_m)} D^2F(\nabla u)([\partial_\gamma u - P_\gamma]\nabla\tilde{\eta}, [\partial_\gamma u - P_\gamma]\nabla\tilde{\eta})\, dz$$

und unter Anwendung von (6.1) und Summation über $\gamma \in \{1, ..., d\}$

$$\int\limits_{B_{r_m}(x_m)} \tilde{\eta}^2 |\nabla^2 u|^2\, dz \leq \int\limits_{B_{r_m}(x_m)} |\nabla\tilde{\eta}|^2 |\nabla u - P|^2\, dz. \tag{6.25}$$

Wir betrachten $\eta(z) := \tilde{\eta}(x_m + r_m z)$ und erhalten wegen

$$\nabla^2 u_m(z) = \frac{r_m}{\lambda_m} \nabla^2 u(x_m + r_m z)$$

schließlich aus (6.25) mit der Wahl $P = A_m$

$$\frac{\lambda_m}{r_m} \int\limits_{B_1} \eta^2 |\nabla^2 u_m|^2\, dz \leq c \frac{\lambda_m}{r_m} \int\limits_{B_1} |\nabla\eta|^2 |\nabla u_m|^2\, dz,$$

was äquivalent ist zu

$$\int\limits_{B_1} \eta^2 |\nabla^2 u_m|^2\, dz \leq c(\eta) \int\limits_{B_1} |\nabla u_m|^2\, dz.$$

Da die rechte Seite uniform in m beschränkt ist (vgl (6.18)), gilt dies auch für die linke und wir erhalten uniform Beschränktheit von u_m in $W^{2,2}_{loc}(B_1)$ bei passender Wahl von η; nach Teilfolgenwahl also

$$u_m \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{in } W^{2,2}_{loc}(B_1).$$

Der Satz von Rellich-Kondrachov ergibt (nach erneuter Teilfolgenwahl) $u_m \to \overline{u}$ in $W^{1,2}_{loc}(B_1)$, also (6.24), □

Mit dem Beweis von LEMMA 6.1 kommen wir zum folgenden partiellen Regularitätssatz

Satz 6.13 *Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ein Minimierer. Dann gilt $u \in C^{1,\alpha}(\Omega_0)$ für alle $\alpha < 1$ und Ω_0 ist offen.*

Bemerkung 6.14 *Satz 6.13 zeigt also, dass u stetig differenzierbar ist abgesehen von einer Menge mit $d-2$ dimensionalem Hausdorff-Maß $= 0$.*

Beweis von Satz 6.13

Sei $x_0 \in \Omega_0$. Wir definieren $L := 2 \limsup_{r \to 0} |(\nabla u)_{x_0,r}|$ und τ durch die Bezieung $C_* \tau^2 = 1/2$. Mit fixiertem L und τ können wir ein $\epsilon = \epsilon(\tau, L)$ wie in LEMMA 6.1 finden. Wir wählen einen Radius $R > 0$ mit

$$E(x_0, R) < \epsilon, \qquad |(\nabla u)_{x_0,R}| < \frac{2L}{3}. \tag{6.26}$$

LEMMA 6.1 ist damit anwendbar und es folgt

$$E(x, \tau R) \le C_* \tau^2 E(x, R) \le \frac{1}{2}\epsilon.$$

LEMMA 6.1 ist also auch auf die Kugel $B_{x_0,\tau R}$ anwendbar (beachte $\tau \in (0,1)$). Wir zeigen nun

$$E(x_0, \tau^k R) < \epsilon, \qquad |(\nabla u)_{x_0,\tau^k R}| \le L \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{6.27}$$

Der Induktionsanfang steht bereits in (6.26), nehmen wir an, die Aussage sei für $k \in \mathbb{N}$ richtig. Es folgt aus LEMMA 6.1

$$E(x, \tau^{k+1} R) \le (C_* \tau^2) E(x, \tau^k R) < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
|(\nabla u)_{x_0,\tau^{k+1}R}| &\le \sum_{l=0}^{k} |(\nabla u)_{x_0,\tau^{l+1}R} - (\nabla u)_{x_0,\tau^l R}| + |(\nabla u)_{x_0,R}| \\
&\le \sum_{l=0}^{k} \fint_{B_{\tau^{l+1}R}(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{x_0,\tau^l R}| \, dx + \frac{2L}{3} \\
&\le \sum_{l=0}^{k} \left(\fint_{B_{\tau^{l+1}R}(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{x_0,\tau^l R}|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2L}{3} \\
&\le c(\tau) \sum_{l=0}^{k} \left(\fint_{B_{\tau^l R}(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{x_0,\tau^l R}|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2L}{3} \\
&= c(\tau) \sum_{l=0}^{k} \big(E(x_0, \tau^l R) \big)^{\frac{1}{2}} + |(\nabla u)_{x_0,R}| \\
&\le c(\tau) \sum_{l=0}^{k} \sqrt{2}^{-l} \sqrt{\epsilon} + \frac{2L}{3} \le c(\tau) \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2}^{-l} \sqrt{\epsilon} + \frac{2L}{3} \\
&\le c(\tau) \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\epsilon} + \frac{2L}{3}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir

$$E(x,\tau^l R) \le (C_* \tau^2)^l E(x,R) \le 2^{-l} E(x,R)$$

für alle $l \le k$ benutzt (Induktionsvoraussetzung und LEMMA 6.1) sowie (6.26). Es folgt (wenn wir ϵ evtl. verkleinern)

$$|(\nabla u)_{x_0,\tau^{k+1}R}| \le L.$$

Wir haben also (6.27) bewiesen und es folgt

$$E(x,\tau^k R) \le (C_* \tau^2)^k E(x,R) = 2^{-k} E(x,R) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.28}$$

Sei jetzt $r \le R$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\tau^{k+1} R \le r \le \tau^k R$. Es folgt (beachte, dass $(v)_A$ die Funktion $Q \mapsto \int_A |v-Q|^2\,dx$ minimiert)

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{x_0,r}|^2\,dz \le \int_{B_r(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{x_0,\tau^k R}|^2\,dz \le \int_{B_{\tau^k R}(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{x_0,\tau^k R}|^2\,dz$$

und damit

$$\fint_{B_r(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{x_0,r}|^2\,dz \le \tau^{-d} \fint_{B_{\tau^k R}(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{x_0,\tau^k R}|^2\,dz$$

also

$$E(x_0,r) \le cE(x_0,\tau^k R).$$

Aus $\tau^{k+1}R \le r \le \tau^k R$ erhalte wir $k \ge \ln\left(\frac{r}{R}\right)/\ln\tau - 1$ und damit

$$\begin{aligned} E(x_0,r) &\le c2^{-\left(\ln\left(\frac{r}{R}\right)/\ln\tau - 1\right)} E(x_0,R) \\ &= 2c\left(2^{\ln\left(\frac{r}{R}\right)}\right)^{-1/\ln\tau} E(x_0,R) \\ &= 2c\left[\left(e^{\ln\left(\frac{r}{R}\right)}\right)\right]^{-\ln 2/\ln\tau} E(x_0,R). \end{aligned}$$

Mit der Wahl $\beta := -\ln 2/\ln\tau$ ist also

$$E(x_0,r) \quad \le \quad c\left(\frac{r}{R}\right)^\beta E(x_0,R). \tag{6.29}$$

Weiterhin gilt

$$E(x_0,R) = \fint_{B_R(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{x_0,R}|^2\,dz \le c(R)\left[\int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\,dz + |(\nabla u)_{x_0,R}|^2\right]$$

$$\leq c \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2 \, dz \leq c \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dz$$

unabhängig von x_0. Es ergibt sich

$$E(x_0, r) \quad \leq \quad cr^\beta. \tag{6.30}$$

Die Ungleichung (6.31) ist richtig unter der Hypothese (6.26), aber (6.26) gilt auch für alle Mittelpunkte $\overline{x}_0$ die nahe bei x_0 liegen (bei fixiertem R), so dass (6.28) auch für alle $\overline{x}_0 \in B_\rho(x_0)$, $\rho \ll 1$, gilt. Es folgt

$$⨍_{B_r(y)} |\nabla u - (\nabla u)_{y,r}|^2 \, dz \quad \leq \quad cr^\beta \tag{6.31}$$

für alle $y \in B_\rho(x_0)$ mit c unabhängig von y und r und ohne Einschränkung gelte $\beta < 2$. Lemma 6.10 ergibt $\nabla u \in C^{0,\frac{\beta}{2}}$, insbesondere ist ∇u stetig auf $y \in B_\rho(x_0)$. D.h. $\partial_\gamma u$ ist Lösung der Gleichung

$$\int_{B_\rho(x_0)} D^2F(\nabla u)(\partial_\gamma \nabla u, \nabla \phi) \, dx = 0$$

für alle $\phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ mit kompaktem Träger in $B_\rho(x_0)$ mit stetigen Koeffizienten $D^2F(\nabla u)$. Aus Lemma 6.8 folgt $\partial_\gamma u \in C^{0,\alpha}(B_\rho(x_0))$ für alle $\alpha < 1$ und damit $u \in C^{1,\alpha}(\Omega_0)$ für alle $\alpha < 1$. Man sieht leicht die Äquivalent u stetig differenzierbar in $x_0 \Longleftrightarrow x_0 \in \Omega_0$, was zeigt, dass Ω_0 offen ist.

Bemerkung 6.15 *a) Die Methoden dieses Abschnitt werden auch für Porbleme mit p-Wachstum benutzt, d.h.*

$$\begin{aligned} c_1 |Z|^p - c_2 \leq \quad & F(Z) && \leq c_3 |Z|^p + c_4, \\ \lambda \left(1 + |Z|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |X|^2 \leq \quad & D^2F(Z)(X,X) && \leq \Lambda \left(1 + |Z|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |X|^2 . \end{aligned}$$

für alle $X, Z \in \mathbb{R}^d$ mit $2 \leq p < \infty$ (man beachte, dass die zweite Ungleichung die erste impliziert). Die Rechungen werden aber komplizierter. Für $1 < p < 2$ bleiben die Aussagen richtig, man benötigt jedoch andere Techniken.

b) Für Anwendungen sind insbesondere Probleme der Form

$$\int_\Omega F(\epsilon(u)) \, dx \longrightarrow \min, \quad \epsilon(u) = \frac{1}{2} \left(\nabla u + \nabla u^T\right)$$

von Interesse. Man benötigt zusätzlich Argumente, die Aussagen bleiben *jedoch richtig. Hier betrachtet man Funktionen* $u : \mathbb{R}^d \supset \Omega \to \mathbb{R}^d$ *mit* $d \in \{2, 3\}$.

Literaturverzeichnis

[Ad] R. A. Adams. *Sobolev Spaces.* Pure Appl. Math. **65**, Academic Press, New York/ London (1975).

[AFP] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems.* Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford (2000).

[Al] M. A. Al-Gwaiz. *Theory of Distributions.* Pure Appl. Math. **159**, Marcel Dekker Inc., New York (1992).

[Alt] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis — Eine anwendungsorientierte Einführung.* Springer–Lehrbuch. Zweite, verbesserte Auflage, Springer Verlag, Berlin et. al. (1992).

[BF] M. Bildhauer, M. Fuchs. *Partial Regularity for a Class of Anisotropic Variational Integrals With Convex Hull Property.* Asymp. Anal. **32**, 293–315 (2002).

[Da] B. Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations.* Appl. Math. Sci. **78**, Springer Verlag, Berlin et. al. (1989).

[EG] L. C. Evans, R. F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Studies in Advanced Math., CRC Press LLC, Boca Raton et. al. (1992).

[Fe] H. Federer. *Geometric Measure Theory.* Grundl. math. Wiss. **153**, Springer Verlag, Berlin (1969).

[Gia 1] M. Giaquinta. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems.* Ann. Math. Stud. **105**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1983).

[GMS] m. Giaquinta, g. Modica, j. Souček. *Cartesian Currents in the Calculus of Variations I & II.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **37/38**, Springer–Verlag, Berlin (1998).

[GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Grundl. math. Wiss. **224**, Springer Verlag, Berlin et. al. (1977).

[HS] E. Hewitt, K. Stromberg. *Real and Abstract Analysis — A Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable*. Zweite, korrigierte Auflage, Springer Verlag, Berlin (1969).

[Mo] C. B. Morrey. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Grundl. math. Wiss. **130**, Springer Verlag, Berlin (1966).

[St] E. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions* Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1970).

[Yo] K. Yosida. *Functional Analysis*. Grundl. math. Wiss. **123**, Springer Verlag, Berlin (1965).

Index