Anwendungen partieller Differentialgleichungen

Dr. Dominic Breit

27.01.2012

Outline

Gleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \ldots \times \mathbb{R}^{d^k} \to \mathbb{R}$.

Finde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$H(x, u, \nabla u, \ldots, \nabla^k u) = 0 \quad \text{auf } \Omega$$

Zusammen mit Randbedingungen.

- Lineare Gleichung:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{auf } \Omega, \\ u = u_0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

Systeme

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{dD} \times \ldots \times \mathbb{R}^{(dD)^k} \to \mathbb{R}^D$.

Finde $u : \Omega \to \mathbb{R}^D$ mit

$$H_m(x, u, \nabla u, \ldots, \nabla^k u) = 0 \quad \text{auf } \Omega, \qquad m = 1, \ldots D.$$

Zusammen mit Randbedingungen.

- Nichtineares System:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left\{|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right\} = f & \text{auf } \Omega, \\ u = u_0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

Fluidmechanik (1)

Finde ein Geschwindigkeitsfeld $v : Q \to \mathbb{R}^d$ und eine Druckfuntion $\pi : Q \to \mathbb{R}$ als Lösung des

Systems partieller Differentialgleichungen

$$\begin{cases} -\partial_t v + \operatorname{div} \sigma = (\nabla v)v + \nabla \pi - f & \text{auf } Q, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{auf } Q, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \\ v(0,\cdot) = v_0 & \text{auf } \Omega. \end{cases}$$

- $Q := \Omega \times (0, T)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$ und $T > 0$;
- $f : Q \to \mathbb{R}^d$ ist eine äußere Beschleunigung;
- $\sigma : Q \to \mathbb{R}^{d \times d}$ ist der Cauchy Stress Tensor.

Fluidmechanik (2)

Um ein spezielles Fluid zu bschreiben, benötigt man ein konstitutives Gesetz, das σ und den symmetrischen Gradient

$$\varepsilon(v) := \frac{1}{2}\left(\nabla v + \nabla v^T\right)$$

in Relation setzt.

- Newtonsches Fluid: $\sigma = \nu\varepsilon(v)$ (Wasser, Luft und Öl);
- Verallgemeinertes Newtonsches Fluid: $\sigma = |\varepsilon(v)|^{p-2}\varepsilon(v)$;
- Die Viskosität ist eine Funktion der Scherrate $|\varepsilon(v)|$;
- $p > 2 \Rightarrow \nu$ wachsend $\Rightarrow$ verdickend (Kuchenteig);
- $p < 2 \Rightarrow \nu$ fallend $\Rightarrow$ verdünnend (Blut, Ketschup).

Fluidmechanik (3)

Unter vernachlässigung der zeitlichen Änderung und der Eigenrotation innerhalb der Flüssigkeit erhält man das

p-Stokes Problem

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left\{|\varepsilon(v)|^{p-2}\varepsilon(v)\right\} = \nabla\pi - f & \text{auf } \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{auf } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Äquivalent dazu ist die Minimerung von

$$J[v] = \frac{1}{p}\int_\Omega |\varepsilon(v)|^p \, dx - \int_\Omega f \cdot v \, dx \quad \text{u.d.N.} \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Materialwissenschaften (1)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper, der durch Einwirkung der Kraft $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ deformiert wird. Sei $\overline{x}$ ist die aktuelle Position des Materialpunktes $x \in \Omega$ und $u(x) = \overline{x} - x$ die Verzerrung. Diese ergibt sich durch

Minimierung von

$$J[u] := \int_\Omega \left\{ |\operatorname{div}(u)|^2 + \varphi(|\varepsilon^D(u)|) \right\} dx - \int_\Omega f \cdot u \, dx$$

zu gegebenen Randdaten.

- $\operatorname{div}(u)$ beschreibt die Volumenänderung von Ω;
- $\varepsilon^D(u) = \varepsilon(u) - \frac{1}{3} \operatorname{div}(u) I$ eine Verdrehung des Körpers;
- Mit $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ können die Materialeigenschaften modelliert werden.

Materialwissenschaften (2)

Die Minimierung von J is äquivalent zur

Lösung von

$$\operatorname{div}\sigma = f, \quad \sigma = \sigma(\varepsilon(u)) = 2\operatorname{div}(u)I + \frac{\varphi'(|\varepsilon^D(u)|)}{|\varepsilon^D(u)|}\varepsilon^D(u),$$

bei gegebenen Randdaten.

- Linear Elastisches Material: $\varphi(|\varepsilon^D|) = \lambda|\varepsilon^D|^2$;
- Elastisch-plastisches Material: $\varphi(|\varepsilon^D|) = \lambda|\varepsilon^D|^p$, $1 < p < 2$;
- Plastisches Material: $\varphi(|\varepsilon^D|) = \lambda|\varepsilon^D|$.

Entrauschung von Bildern

Wir betrachten ein gestörtes Schwarz-Weiß-Bild, dass durch eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}$ beschrieben wird ($\Omega = [0, a] \times [0, b]$). Dabei gibt der Funktionswert $f(x)$ an wie dunkel der Grauton im Bildpunkt x ist (je dunkler desto größer der Wert).

Minimierung des Funktionals ($\alpha > 0$)

$$E_f[u] := \int_\Omega \left\{ (u - f)^2 + \alpha |\nabla u|^2 \right\} dx.$$

- $(f - u)^2$ steht für den Abstand zum ursprünglichen Bild;
- $|\nabla u|$ ist ein Maß für die Glattheit des entrauschten Bildes.

Minimalflächen (1)

Finde eine Funktion $u^* : \Omega \to \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$) so dass

$$J[u] = \text{Fläche des Graphen von } u := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx$$

minimal wird. Dabei soll $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$ gelten.

BILD FEHLT

Minimalflächen (2)

Äquivalent zur Minimierung von J ist die Lösung der nichtlinearen

Minimalflächengleichung

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 & \text{auf } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Black-Scholes-Gleichung (1)

Eine Option ist das Recht eine Aktie an einem ZUKÜNFTIGEN Zeitpunkt ($t = T$) zu einem HEUTE ($t = 0$) festgelegten Preis E zu kaufen. Gesucht ist der

Gleichgewichts-Preis

$$C(t) = C(t, S(t), r, \sigma)$$

für dieses Recht.

- $S(t)$ ist der Preis der Aktie zum Zeitpunkt t;
- r ist der risikolose Zins;
- σ ist die Volatilität der Aktie (Risiko).

Black-Scholes-Gleichung (2)

C ist Lšung von

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad \text{auf} \quad [0,\infty) \times [0, T]$$

zu den Randbedingungen

$$C(S,T) = \max\{S - E, 0\}, \quad C(0,t) = 0,$$
$$C(S,t) \approx S \text{ für } \quad S \to \infty.$$

- Analytische Berechnung der Lösung;
- Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften 1997;
- Annahme: Aktienpreis $(S_t)_{t\geq 0}$ folgt Brownscher Bewegung;
- Mandelbrot (1960): Aktienkurse sind NICHT normalverteilt.

OHLC-Werte zu Preisprozessen (1)

Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ ein zeitstetiger stochastischer Prozess (z.B. ein Aktienkurs). In vielen Anwendungen benötigt man

OHLC-Werte (Open-High-Low-Close)

$$\left(P_{\frac{i-1}{N}}, (P^*)_{\frac{i-1}{N}}, (P_*)_{\frac{i-1}{N}}, P_{\frac{i}{N}}\right), \quad i =, 1, ..., N,$$
$$(P^*)_t = \sup_{s\leq t} P_s, \quad (P_*)_t = \inf_{s\leq t} P_s.$$

Daher ist man an der Verteilung des Vektors

$$(W_t, (W^*)_t, (W_*)_t), \quad t \geq 0,$$

interessiert. Hierbei ist $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.

OHLC-Werte zu Preisprozessen (2)

Die Dichte zu $(W_t, (W^*)_t, (W_*)_t)$ ergibt sich durch Lösung der

parabolischen Differentialgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t,z) & \text{auf } [0,\infty) \times [m, M], \\ u(t,z) = 0 & \text{falls } z \in \{m, M\}, \\ u(0,z) = \delta(z) & \text{auf } [m, M]. \end{cases}$$

Die Dichte $f_t(z, m, M)$ berechnet sich mit Hilfe von

$$u(t, z, m, M) = P(m < (W_*)_t, (W^*)_t < M, W_t \in dz)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(e^{-(z+2k(M-m))^2/2t} - e^{-(z-2m+2k(M-m))^2/2t} \right).$$