Lipschitz-Truncation – eine Anwendung

Maximilian Wank

LMU München

Hüttenseminar im
Sommersemester 2014

Γ-Konvergenz

X topologischer Raum der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, $F_n, F : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Wir sagen $F = \Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n$ g.d.w.

1. $\forall (x_n)_n \subset X$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in X$ gilt
$$F(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x_n).$$
2. $\forall x \in X$ gibt es $(x_n)_n \subset X$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in X$ s.d.
$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x_n).$$

<u>Bemerkung:</u> Es gibt eine allgemeinere Definition für beliebige topol. Räume, die mit dieser übereinstimmt.

Γ-Grenzwerte – ein Beispiel

Setze $X := \mathbb{R}$ und $F_n(x) := \sin(nx)$. Dann,

1. $-1 \leq \liminf_{n\to\infty} \sin(nx_n)$ und
2. Für $x \in \mathbb{R}$ definiere x_n als den nächsten Punkt mit $\sin(nx_n) = -1$.
   $\sin(n\,\cdot\,)$ ist $\frac{2\pi}{n}$-periodisch $\implies |x_n - x| \leq \frac{\pi}{n} \implies x_n \to x$.
   Darüberhinaus $-1 = \lim_{n\to\infty} \sin(nx_n)$.

$\implies \Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} \sin(n\,\cdot\,) = -1.$

Wir erkennen:

1. Zusätzliche Eigenschaften für den Vergleich mit punktweiser Konvergenz nötig.
2. Konzept verträglich mit Minimierungsproblemen!

Γ-Limiten und Minimierung

Theorem

Sei $(F_n)_n$ equi-koerziv, $F = \Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n$ und $\exists! x_0 \in X$ welches F minimiert. Wähle

$$x_n \in \operatorname*{argmin}_{x\in X} F_n(x).$$

Dann $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ und $(F_n(x_n))_n \xrightarrow{n\to\infty} F(x_0)$.

p-Poisson Gleichung

Klassische Formulierung: u ist Lösung, falls

$$-\Delta_p u := -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \text{ on } \Omega$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

Schwache Formulierung: $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ist schwache Lösung falls

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\xi \, dx = \int_\Omega f\xi \, dx \qquad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega)$$

u Lösung $\Longrightarrow$ u schwache Lösung $\Longleftrightarrow$ u ist (eindeutiger) Minimierer von

$$\mathcal{J}(v) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx - \int_\Omega fv \, dx.$$

Aufgespaltene Energie

Sei $1 < p < 2$ and minimiere

$$\mathcal{J}^s(v,a) := \int_\Omega \tfrac{1}{2}|a|^{p-2}|\nabla v|^2 + (\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2})|a|^p \, dx - \int_\Omega fv \, dx$$

Lemma

Sei (u,a) lokaler Minimierer von $\mathcal{J}^s$.
Dann ist u schwache Lösung der p-Poisson-Gleichung und

$$|a| = |\nabla u|.$$

Eingeschränkte, aufgespaltene Energie

Einschränkung für a zu Stabilisierungszwecken:

$$\mathcal{J}_\varepsilon^s(u,a) := \mathcal{J}^s(u, \varepsilon \vee |a| \wedge \tfrac{1}{\varepsilon})$$

Lemma

Für festes $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ist $a = \varepsilon \vee |\nabla u| \wedge \frac{1}{\varepsilon}$ der eindeutige Minimierer von $\mathcal{J}_\varepsilon^s(u,\,\cdot\,)$, der $a = \varepsilon \vee a \wedge \frac{1}{\varepsilon}$ erfüllt.

Wir wollen

$$u_{k+1} := \operatorname{argmin} \mathcal{J}_\varepsilon^s(\,\cdot\,, a_k) \quad \text{und} \quad a_{k+1} := \varepsilon \vee |\nabla u_{k+1}| \wedge \tfrac{1}{\varepsilon}$$

verwenden.

Eingeschränkte Energie

Wie beeinflusst ε den Algorithmus?

Define

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u) := \min_{a = \varepsilon \vee |a| \wedge \frac{1}{\varepsilon}} \mathcal{J}^s_\varepsilon(u,a) = \mathcal{J}^s(u, \varepsilon \vee |\nabla u| \wedge \tfrac{1}{\varepsilon})$$
$$= \int_\Omega \kappa_\varepsilon(|\nabla u|)\,dx - \int_\Omega fu\,dx$$

Theorem

Sei u Minimierer von $\mathcal{J}$ und u_ε Minimierer von $\mathcal{J}_\varepsilon$.
Dann $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}_0(\Omega)$ für $\varepsilon \searrow 0$.

Strukturierung des Beweises

Hauptschritte im Beweis:

1. 1. Abzählbarkeitsaxiom,
2. Equi-Koerzivität der $\mathcal{J}_\varepsilon$ (nicht in diesem Vortrag) und
3. $\mathcal{J} = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{J}_\varepsilon$.
4. Wende Theorem von Folie 4 an.

Auftretende Probleme:

- Keine Equi-Koerzivität bezüglich Norm-Topologie
  $\Longrightarrow$ müssen schwache Topologie verwenden.
- Kein 1. Abzählbarkeitsaxiom auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ bez. schwacher Topologie.

Geeigneter topologischer Raum

Wir wählen den topologischen Raum

$$X := \{w \in W_0^{1,p}(\Omega) \,:\, \mathcal{J}_{(0.5)}(w) \le 0\} \cup \{w \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \,:\, \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)} \le \gamma\}.$$

A priori Abschätzungen für u_ε und Monotonie von $\mathcal{J}_\varepsilon$ in ε

$\Longrightarrow$ X ist beschränkt:

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \sim \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \le c\left(\|f\|_{L^{p'}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{T}_{\text{weak}}$ ist von einer Metrik induziert (weil $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^*$ separabel ist).

$\Longrightarrow$ $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$ ist abzählbare Umgebungsbasis von x_0.

Das ist das 1. Abzählbarkeitsaxiom!

lim inf-Bedingung

Sei $v \in X$ und $v_n \rightharpoonup v$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ für $n \to \infty$. Dann

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{J}_{(\varepsilon_n)}(v_n) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{J}(v_n) \geq \mathcal{J}(v).$$

$\Longrightarrow$ $\liminf$*-Bedinung ist erfüllt.*

Müssen noch eine *recovering sequence* finden!

Für $v \in \{w \in W_0^{1,\infty}(\Omega) : \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)} \leq \gamma\}$ wähle $v_n \equiv v$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_{(\varepsilon_n)}(v_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_{(\varepsilon_n)}(v) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \kappa_{(\varepsilon_n)}(|\nabla v|)\,dx - f(v)$$

$$= \int_\Omega |\nabla v|^p\,dx - f(v) = \mathcal{J}(v)$$

Lipschitz-Truncation

Theorem (Diening, Kreuzer, Süli, 2013)

Sei $\lambda > 0$ und $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann gibt es $v_\lambda \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(G) $\{v \neq v_\lambda\} \subset \mathcal{O}_\lambda(v) \cap \Omega$,

(S1) $\|v_\lambda\|_{L^p(\Omega)} \leq c_1 \|v\|_{L^p(\Omega)}$,

(S2) $\|\nabla v_\lambda\|_{L^p(\Omega)} \leq c_2 \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$ *und*

(L) $|\nabla v_\lambda| \leq c\lambda \chi_{\mathcal{O}_\lambda(v) \cap \Omega} + |\nabla v| \chi_{\mathcal{O}_\lambda(v)^\complement \cap \Omega} \leq c_3 \lambda$ *fast überall.*

Für $\varepsilon_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ definiere $\lambda_n := \frac{1}{c_3 \varepsilon_n} \quad \Longrightarrow \quad |\nabla v_{\lambda_n}| \leq \frac{1}{\varepsilon_n}$ fast überall.

Recovering sequence

Für $v \in \{w \in W_0^{1,p}(\Omega) \,:\, \mathcal{J}_{(0.5)}(w) \leq 0\}$ geben die Lipschitz-Truncations

$$v_n := v_{\lambda_n}$$

eine zulässige recovering sequence. Zunächst

$$\|\nabla v_n\|_{L^p(\Omega)} \leq c_2 \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \leq c \left(\|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p-1}} =: \gamma$$

und $(v_n)_n \subset W_0^{1,\infty}(\Omega)$. Daher ist $(v_n)_n \subset X$. Bleibt zu zeigen, dass

$$\mathcal{J}_{\varepsilon_n}(v_n) - \mathcal{J}(v) = \int_\Omega \kappa_{\varepsilon_n}(|\nabla v_n|) - |\nabla v|^p \, dx - \langle f, v_n - v \rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dafür teilen wir Ω in $\Omega_1 := \mathcal{O}_{\lambda_n}(v)^{\complement} \cap \Omega$ und $\Omega_2 := \mathcal{O}_{\lambda_n}(v) \cap \Omega$.

Konvergenz auf der guten Menge

Auf Ω_1 gilt $v \equiv v_n$.

Außerdem gilt $|\nabla v_n| \leq c_3 \lambda_n = \frac{1}{\varepsilon_n}$ und zusätzlich $\kappa_{\varepsilon_n}(t) = \frac{1}{p} t^p$ für $t \in [\varepsilon_n, \frac{1}{\varepsilon_n}]$.

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega_1} \kappa_{\varepsilon_n}(|\nabla v_n|) - \varphi(|\nabla v|)\, dx \right| &= \left| \int_{\Omega_1} \kappa_{\varepsilon_n}(|\nabla v_n|) - \frac{1}{p} |\nabla v_n|^p \, dx \right| \\
&= \left| \int_{\Omega_1 \cap \{|\nabla v_n| < \varepsilon_n\}} \kappa_{\varepsilon_n}(|\nabla v_n|) - \frac{1}{p} |\nabla v_n|^p \, dx \right| \\
&\leq \frac{2}{p} \, |\Omega| \, \varepsilon_n^p \\
&\xrightarrow{n \to \infty} 0.
\end{aligned}$$

Konvergenz auf der schlechten Menge

Es gilt $|\Omega_2| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $M(|\nabla v|) \in L^p(\Omega)$, also

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_{\Omega_2} \kappa_{(\varepsilon_n)}(|\nabla v_n|) - |\nabla v|^p \, dx \right| &\leq \int\limits_{\Omega_2} \kappa_{(\varepsilon_n)}(|\nabla v_n|) + |\nabla v|^p \, dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega_2} \varphi(c_3 \lambda) + |\nabla v|^p \, dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega_2} \underbrace{c_3^p M(|\nabla v|)^p + |\nabla v|^p}_{\in L^1(\Omega)} \, dx \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Zögert nicht, Fragen zu stellen!

Literatur:

- Dal Maso: “An Introduction to Γ-convergence”
- Diening, Kreuzer, Süli: “Finite element approximation of steady flows of incompressible fluids with implicit power-law-like rheology”