Galton-Watson tree

Thomas Reitsam

LMU München

Zillertal, 26.6-29.6.2014

Definitionen & Notationen

- $\mathcal{T}$ zufälliger Baum
- $\mathcal{T}_n = (\mathcal{T} \mid |\mathcal{T}| = n)$
- $\xi \in \{0, 1, \dots\}$ Nachkommensverteilung
- Z_k Breite in Level k
- $W = \max_{k \geq 0} Z_k(T)$
- $\mathbb{E}[\xi] = 1 \Rightarrow \mathbb{E}[Z_k] = \mathbb{E}[Z_{k-1}]\mathbb{E}[\xi] = \cdots = \mathbb{E}[\xi]^k = 1$

Tilting/Konjugation

$$\mathbb{P}(\xi' = k) = ca^k \mathbb{P}(\xi = k) \qquad c = \frac{1}{\mathbb{E}[a^\xi]}, a > 0$$

$|\mathcal{T}| = n$

- $\xi' s$ sind unabhängige, identische Zufallsvariablen (i.i.d.)
- $\xi' s$ haben insgesamt $n - 1$ Nachkommen; (+ Wurzel) ergibt n Knoten
- $\xi' s$ brechen nicht vorher ab

$$(|\mathcal{T}| = n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i = n - 1 \ , \ \sum_{i=1}^{N} \xi_i \geq N \ \forall N < n \right)$$

Außerdem brauchen wir:

$$\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) > 0 \ \Leftrightarrow \ n = 1 \ _{\text{mod } span(\xi)}$$

Wobei $span(\xi) = d$ die größte ganze Zahl ist, s.d. $\xi / d \in \mathbb{Z}$ $f.s.$.

Cycle Lemma

Seien $\eta_1, \ldots, \eta_n$ ganzzahlige Variablen ≥ -1 und $\tilde{S}_n := \sum_{i=1}^{n} \eta_i = -1$. Dann existiert genau eine Rotation $t, \eta_i^t := \eta_{(i+t) \bmod n}$, $t \in \{1, \ldots, n-1\}$, so dass

$$\tilde{S}_N^t := \sum_{i=1}^{N} \eta_i^t \geq 0 \ \forall N \in \{1, \ldots, n-1\}$$

$\Leftrightarrow (\xi_i)_i \in \mathbb{N}_0$ und $S_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i = n-1$. Dann:

$$S_N^t := \sum_{i=1}^{N} \xi_i^t \geq N \ \forall N \in \{1, \ldots, n-1\}$$

Theorem 1

Sei $\mathbb{E}[\xi] = 1$ und $\text{Var}[\xi] < \infty$. Dann gilt

1. $\mathbb{P}(W(\mathcal{T}_n) \geq x) \leq Ce^{-c\frac{x^2}{n}}$
2. $\mathbb{P}(H(\mathcal{T}_n) \geq h) \leq Ce^{-c\frac{h^2}{n}}$

für alle $x, h \geq 0$ und $n \geq 1$.

Beweis 1/5

Definiere Breitensuche Q_j:

$$Q_0 := 1 \ \textit{and} \ Q_j = 1 + \tilde{S}_j, \ \textit{wobei} \ \tilde{S}_j = \sum_{i=1}^{j} (\xi_i - 1) = S_j - j$$

- $Q_j = Z_k$, wenn Q_j alle Knoten in Z_{k-1} erkundet hat
- $Q_j > 0 \ \forall j < n \ \Leftrightarrow \ \tilde{S}_j \geq 0 \ \forall j < n$
- $Q_n = 0 \ \Leftrightarrow \ \tilde{S}_n = -1$ (Baum vollständig erkundet)
- $W := \max_{k \geq 0} Z_k \leq \max_{j \geq 0} Q_j$

Beweis 2/5

$$\mathbb{P}(W(\mathcal{T}_n) \geq x+1) \leq \mathbb{P}(\max_{j\geq 0} Q_j(\mathcal{T}_n) \geq x+1)$$
$$= \mathbb{P}(\max_{j\geq 0} \tilde{S}_j \geq x \mid \tilde{S}_j \geq 0 \ \forall j < n \ , \ \tilde{S}_n = -1)$$

Wähle eindeutige Rotation (Cycle-Lemma) um Bedingung $\tilde{S}_j \geq 0$ loszuwerden. Dadurch kann $\max_{j\geq 0}$ nach oben geschoben werden. Aber es gilt:

$$\max_{j\geq 0} \tilde{S}_j^{neu} \leq \max_{j\geq 0} \tilde{S}_j - \min_{j\geq 0} \tilde{S}_j$$
$$\mathbb{P}(\max_{j\geq 0} \tilde{S}_j \geq x \mid \tilde{S}_j \geq 0 \forall j < n \ , \ \tilde{S}_j = -1) \leq \mathbb{P}(\max_{j\geq 0} \tilde{S}_j - \min_{j\geq 0} \tilde{S}_j \mid \tilde{S}_j = -1)$$

Beweis 3/5

$$\mathbb{P}(\max_{0\leq j\leq n} Q_j(\mathcal{T}_n) \geq 2x+2) \leq \mathbb{P}(\max_{0\leq j\leq n} \tilde{S}_j - \min_{0\leq j\leq n} \tilde{S}_j \geq 2x+2|\tilde{S}_n = -1)$$

$$\overset{\subset\& subad.}{\leq} \mathbb{P}(\max_{0\leq j\leq n} \tilde{S}_j \geq x|\tilde{S}_n = -1) + \mathbb{P}(\min_{0\leq j\leq n} \tilde{S}_j \geq -x-1|\tilde{S}_n = -1)$$

Reflektion: $\xi_i \leftrightarrow \xi_{n+1-i}$, also $\tilde{S}_j \leftrightarrow \tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-j}$

$$\tilde{S}_j^{neu} = \sum_{i=1}^{j} (\xi_{n+1-i} - 1) = \tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-j}$$

$$\Rightarrow \tilde{S}_j \overset{d}{=} \tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-j} \Rightarrow \max_{0\leq j\leq n} \tilde{S}_j \overset{d}{=} \max_{0\leq j\leq n} (\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-j})$$

Beweis 4/5

Da $\tilde{S}_n = -1$ nach Voraussetzung, folgt:

$$\begin{aligned}
&\max_{0\leq j\leq n} \tilde{S}_j = -1 - \min_{0\leq j\leq n} \tilde{S}_j \\
\Rightarrow\ &\mathbb{P}(\max_{0\leq j\leq n} \tilde{S}_j \geq x | \tilde{S}_n = -1) = \mathbb{P}(\max_{0\leq j\leq n} \tilde{S}_j \leq -x-1 | \tilde{S}_n = -1) \\
\Rightarrow\ &\mathbb{P}(\max_{0\leq j\leq n} Q_j(\mathcal{T}_n) \geq 2x+2) \leq 2\mathbb{P}(\max_{0\leq j\leq n} \tilde{S}_j \geq x | \tilde{S}_n = -1)
\end{aligned}$$

Definiere die Stoppzeit $\tau := \min\{j \geq 0 \mid \tilde{S}_j \geq x\}$. Es gilt:

$$\max_{0\leq j\leq n} \tilde{S}_j \geq x \Leftrightarrow \tau < n.$$

Beweis 5/5

$$2\mathbb{P}(\tau < n | \tilde{S}_n = -1) = \frac{2\mathbb{P}(\tilde{S}_n = -1 | \tau < n)\mathbb{P}(\tau < n)}{\mathbb{P}(\tilde{S}_n = -1)}$$
$$\leq \frac{Cn^{-\frac{1}{2}} e^{-c\frac{x^2}{n}}}{cn^{-\frac{1}{2}}} \leq Ce^{-c\frac{x^2}{n}}$$

Also endlich:

$$\mathbb{P}(W(\mathcal{T}_n) \geq x) \leq C_1 e^{-c_1 \frac{x^2}{n}}$$

Two-type Galton-Watson Prozess

- Knoten von Typ A und B $\rightarrow$ 4 Nachkommensverteilungen
  - $\xi_{AA} : A \rightarrow A$
  - $\xi_{AB} : A \rightarrow B$
  - $\xi_{BA} : B \rightarrow A$
  - $\xi_{BB} : B \rightarrow B$
- $M = \begin{pmatrix} \xi_{AA} & \xi_{BA} \\ \xi_{AB} & \xi_{BB} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} \mu_{AA} & \mu_{BA} \\ \mu_{AB} & \mu_{BB} \end{pmatrix}$
- $\mu_{ij} > 0 \ \forall i,j \in \{A, B\}$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}[Z_k] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{E}[A_k] \\ \mathbb{E}[B_k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{AA} & \mu_{BA} \\ \mu_{AB} & \mu_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{E}[A_{k-1}] \\ \mathbb{E}[B_{k-1}] \end{pmatrix}$$
$$= \cdots = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{AA} & \mu_{BA} \\ \mu_{AB} & \mu_{BB} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

N ist positiv $\Rightarrow$ 2 verschiedene Eigenvektoren $\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow N$ ist diagonalisierbar

$$\text{D.h. } \exists X \; invertb. \; s.d. \; N = X^{-1}DX, \; wobei \; D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Z_k] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} X^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} X$$

Der Two-type Prozess heißt kritisch, wenn der größte Eigenwert 1 ist.

$$\lambda_1 = \mu_{AA} + \mu_{BB} + \sqrt{(\mu_{AA} - \mu_{BB})^2 - 4\mu_{AB}\mu_{BA}} = 2$$

$$|\lambda_2| = |\mu_{AA} + \mu_{BB} - \sqrt{(\mu_{AA} - \mu_{BB})^2 - 4\mu_{AB}\mu_{BA}}| < 2$$

$$\Rightarrow \mu_{AA} < 1 \textit{ und } \mu_{BB} < 1$$

$\mathcal{T}^A$

- $\mathcal{T}^A$-Prozess sieht nur A-Knoten
- Two-type Prozess $\rightarrow$ Single-type Prozess
- $\mathbb{E}[\xi_A] = 1$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\xi] &= \mu_{AA} + \mu_{AB}\mu_{BA} + \mu_{AB}\mu_{BB}\mu_{AB} + \mu_{AB}\mu_{BB}^2\mu_{AB} + \dots \\
&= \mu_{AA} + \mu_{AB}\mu_{AB}\sum_{i=0}^{\infty}\mu_{BB}^i \\
&= \mu_{AA} + \mu_{AB}\mu_{AB}\frac{1}{1-\mu_{BB}} = 1
\end{aligned}
$$

Theorem 2

Sei $\mathcal{T}^{AB}$ ein kritischer Galton-Watson Baum und $h \geq n$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(H(\mathcal{T}_n^{AB}) \geq h) \leq Ce^{-c\frac{h^2}{n}}$$

für alle $n \geq 1$.

Beweisidee

Bemerke:

$$H(\mathcal{T}^{AB}) \leq H(T^{A}) + \max_{0\leq i\leq N} H(\mathcal{T}_i^{B}) + 1$$

wobei N die Anzahl der $\mathcal{T}^B$ bezeichnet und somit eine Zufallsvariable ist. Man erhält:

$$\mathbb{P}(H(\mathcal{T}_n^{AB}) \geq 2h+1) \leq \mathbb{P}(H(\mathcal{T}^{A}) \geq h \mid |\mathcal{T}^{AB}| = n) + \mathbb{P}(\max_{0\leq i\leq N} H(\mathcal{T}_i^{B}) \geq h \mid |\mathcal{T}^{AB}| = n)$$