Konforme Parametrisierung von Minimalflächen

Vera Muniak

LMU München

Zillertal 26.-29.06.2014

Was ist eine Minimalfläche?

Definition

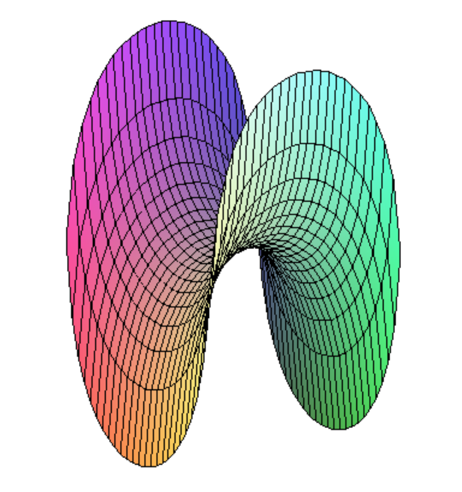
Eine Minimalfläche ist eine Fläche im Raum, die lokal minimalen Flächeninhalt hat.

Definition

$$\text{Mittlere Krümmung H:} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$H = 0 \Leftrightarrow k_1 = -k_2$$


Copyright
Prof.
Neukirch



Konforme Parametrisierungen

Definition

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $F : \Omega \to S$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$ ein lokales Koordinatensystem. Die Parametrisierung F heißt konform, falls

$$|\partial_u F| = |\partial_v F| \text{ und } \partial_u F \cdot \partial_v F = 0$$

auf dem Definitionsgebiet Ω gilt.

1. Fundamentalform

Theorem

Ist $F : \Omega \to S$ konform, so setzt man

$$\lambda^2 := |\partial_u F|^2 = |\partial_v F|^2$$

und siehe die 1. Fundamentalform von S:

$$g_{u,v} = \left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial_u}, \frac{\partial f}{\partial_v} \right\rangle\right) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Speziell ist dann:

$$\det g = \lambda^4$$

Lemma

Ist F eine konforme Parametrisierung von S und bezeichnet $\mathcal{H}$ die auf S erklärte vektorielle mittlere Krümmung, so gilt:

$$\partial_u^2 F + \partial_v^2 F =: \triangle F = 2\mathcal{H}(F) := 2H(F)N(F)$$

H und N sind intrinsische Größen.

2. Fundamentalform

Definition

Sei $h_{\mathrm{u,v}}$ die 2. Fundamentalform von F mit

$$h_{\mathrm{u,v}} = \begin{pmatrix} N \cdot \partial_u^2 F & N \cdot \partial_u F \partial_v F \\ N \cdot \partial_u F \partial_v F & N \cdot \partial_v^2 F \end{pmatrix}$$

dann erhält man durch die Konformitätsrelation:

$$h_{\mathrm{u,v}} = \begin{pmatrix} N \cdot \partial_u^2 F & 0 \\ 0 & N \cdot \partial_v^2 F \end{pmatrix}$$

Definition

Die mittlere Krümmung (Skalar) ist:

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Die Normale ist:

$$N = \frac{\partial_u F x \partial_v F}{|\partial_u F x \partial_v F|}$$

damit erhält man die vektorielle mittlere Krümmung (Vektor)

$$\mathcal{H} = HN$$

Beweis:

Wir wissen, dass $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = H = \frac{1}{2}\triangle F \cdot N$ und setzen H in $\mathcal{H}$ ein:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\triangle F \cdot N)N$$

Nun wollen wir zeigen, dass $\frac{\triangle F}{|\triangle F|} = N \Leftrightarrow \triangle F$ senkrecht auf dem Tangential steht. Es folgt:

$$\partial_u^2 F \cdot \partial_u F = \frac{1}{2}\partial_u|\partial_u F|^2 = \frac{1}{2}\partial_u|\partial_v F|^2 = \partial_v F \cdot \partial_u\partial_v F = \partial_v F \cdot \partial_v\partial_u F = \partial_v^2 F \cdot \partial_u F - \partial_v^2 F \cdot \partial_u F = -\partial_v^2 F \cdot \partial_u F$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2}\triangle F$$

Lemma

Lemma: Sei F konforme Parametrisierung der Klasse C^2 einer Fläche S. Dann gilt:

$$S \text{ ist Minimalfläche } (H = 0) \leftrightarrow F \text{ ist harmonisch } (\triangle F = 0)$$

Sei $F : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ offen, eine beliebige Abbildung der Klasse C^2 . Wir schreiben $z = u + iv$ für einen Punkt (u,v) $\in \Omega$ und setzten k = 1, 2, 3

$$\varphi_k(z) := \partial_u F^k(z) - i\partial_v F^k(z)$$

Dann gilt:

a) φ_k holomorph auf Ω für jedes $k = 1, 2, 3$ genau dann, wenn F auf Ω harmonisch ist.

Def: φ holomorph $\leftrightarrow$ Cauchy-Riemann-Dgl

$$1)\ \partial_u Re\varphi_k = \partial_v Im\varphi_k$$
$$2)\ \partial_v Re\varphi_k = -\partial_u Im\varphi_k$$

Def: F harmonisch $\leftrightarrow \triangle F^k = 0$

Beweis:

$$\triangle F^k = \partial_u^2 F^k + \partial_v^2 F = \partial_u Re\varphi_k - \partial_v Im\varphi_k$$

Somit folgt:

$$\triangle F^k = 0 \leftrightarrow \partial_u Re\varphi_k = \partial_v Im\varphi_k$$

Da nach Cauchy-Riemann-Dgl.,
1)$\partial_u Re\varphi_k = \partial_v Im\varphi_k$ und
2) $\partial_v Re\varphi_k = \partial_v \partial_u F^k = \partial_u \partial_v F^k = -\partial_u(-\partial_v F^k) = -\partial_u Im\varphi_k$
erfüllt sind.

b) F ist genau dann konform, wenn $\sum_{k=1}^{3} \varphi_k^2 \equiv 0$ auf Ω ist

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{3} \varphi_k^2(z) = \sum_{k=1}^{3} (\partial_u F^k(z))^2 - \sum_{k=1}^{3} (\partial_v F^k(z))^2 - 2i \sum_{k=1}^{3} \partial_u F^k(z) \partial_v F^k(z)$$


Pustefix