Kompaktheitssatz von Rellich-Kondrachov

Benjamin Kraska

LMU München

Motivation

Der Satz von Rellich-Kondrachov liefert:

- $W^{1,p}(U)$ kann in $L^q(U)$ eingebettet werden
- Bolzano-Weierstraß-Aussage
- Existenz von Lösungen mancher elliptischer PDEs

Definition: Kompakte Einbettung

Seien X, Y Banachräume, $X \subset Y$. Dann heißt X **kompakt eingebettet** in Y, notiert mit

$$X \subset\subset Y,$$

wenn
(i) $\forall u \in X \; \|u\|_Y \leq C \|u\|_X,\; C > 0.$
(ii) $\sup_m \|u_m\|_X < \infty \Longrightarrow \{u_m\}_m$ hat konvergente Teilfolge in Y.

Kompaktheitssatz von Rellich-Kondrachov

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, so dass ∂U C^1 ist. Sei weiter $1 \leq p < n$. Dann gilt

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

für alle $1 \leq q < p^* := \frac{np}{n-p}$. Dabei heißt p^* das *Sobolev-Konjugierte* von p.

Beweis von (i)

Sei $u \in W^{1,p}(U)$. Wegen $q < p^*$ folgt

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq \bar{C} \|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq \bar{C}\tilde{C} \|Du\|_{L^p(U)} \leq \bar{C}\tilde{C} \|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

für Konstanten $\bar{C}, \tilde{C}$. Die zweite Ungleichung folgt aus der Sobolev-Ungleichung.
Also gilt (i) aus der Definition.

Beweis von (ii)

Sei $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset W^{1,p}(U)$ eine beschränkte Folge,

$$\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(U)} < \infty.$$

Wir müssen zeigen, dass $\{u_m\}_m$ eine konvergente Teilfolge in $L^q(U)$ hat.

Hilfsmittel: Erweiterungstheorem

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $U \subset\subset V$. Dann existiert

$$E : W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

mit
(i) $Eu = u$ fast überall auf U,
(ii) supp$Eu \subset V$.
(iii)

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)} .$$

Wir können daher o.E. annehmen:

- $U = \mathbb{R}^n$
- supp$u_m \subset V$, mit $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.
- $\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty$.

Hilfsmittel: Glättungskern

Sei

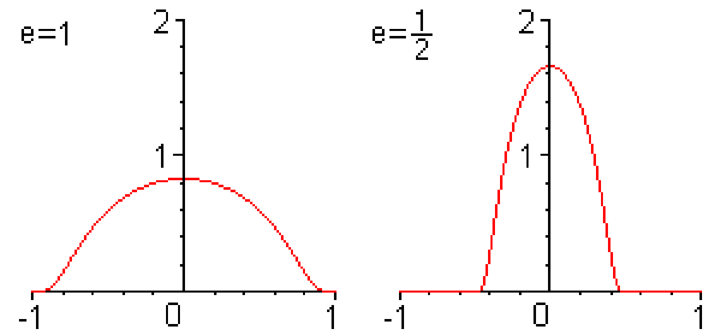
$$\eta(x) := C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) \mathbf{1}_{B_1(0)}(x).$$

Dabei ist C so gewählt, dass $\int_{B_1(0)} \eta = 1$. Setzen wir nun für $\varepsilon > 0$

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

so gilt $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta_\varepsilon \geq 0, \mathrm{supp}\eta_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$, und $\int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon = 1$. η_ε heißt **Glättungskern**.

Glättungskern: Beispiele für $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}$



Glättungskern

Die Faltung $u_m^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_m$ ist glatt. Ferner gilt $\operatorname{supp} u_m^\varepsilon \subset V$, da für alle $x \in V^c$

$$u_m^\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon * u_m(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\, u_m(y)\, dy = 0,$$

da $\operatorname{supp} u_m \cap B_\varepsilon(x) = \emptyset$ für ε klein.

Beweisskizze

Wir gehen wie folgt vor:

1. $u_m^\varepsilon \to u_m, \varepsilon \to 0$, in $L^1(V)$, gleichmäßig in m.
2. Interpolations-Ungleichung $\Longrightarrow u_m^\varepsilon \to u_m, \varepsilon \to 0$, in $L^q(V)$, gleichmäßig in m.
3. Arzela-Ascoli $\Longrightarrow \{u_m^\varepsilon\}_m$ hat eine konvergente Teilfolge in $L^q(V)$.
4. $\{u_m\}_m$ hat eine konvergente Teilfolge in $L^q(V)$.

Beweis von 1.: $u_m^\varepsilon \to u_m, \varepsilon \to 0$, in $L^1(V)$, glm. in m

$$\begin{aligned}
u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) &= \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-z)\, u_m(z)\, dz - u_m(x) \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-z)\, dz \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right) (u_m(z) - u_m(x))\, dz \\
&= \int_{B_1(0)} \eta(y)\, (u_m(x-\varepsilon y) - u_m(x))\, dy \\
&= \int_{B_1(0)} \eta(y) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (u_m(x-\varepsilon t y))\, dt dy \\
&= -\varepsilon \int_{B_1(0)} \eta(y) \int_0^1 Du_m(x-\varepsilon t y) \cdot y dt dy
\end{aligned}$$

Beweis von 1.: $u_m^\varepsilon \to u_m, \varepsilon \to 0$, in $L^1(V)$, glm. in m

Daraus folgt wegen $|y| \leq 1$

$$\begin{aligned}
\int_V |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)| &\leq \varepsilon \int_{B_1(0)} \eta(y) \int_0^1 \int_V |Du_m(x - \varepsilon t y)| \, dxdtdy \\
&\leq \varepsilon \int_{B_1(0)} \eta(y) \int_0^1 \int_{V-\varepsilon t y} |Du_m(x)| \, dxdtdy \\
&\leq \varepsilon \int_{B_1(0)} \eta(y) \, dy \cdot \int_0^1 dt \cdot \int_V |Du_m(x)| \, dx \\
&= \varepsilon \int_V |Du_m(x)| \, dx.
\end{aligned}$$

Beweis von 1.: $u_m^\varepsilon \to u_m, \varepsilon \to 0$, in $L^1(V)$, glm. in m

Damit gilt

$$\begin{aligned} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)} &\leq \varepsilon \|Du_m\|_{L^1(V)} \\ &\leq \varepsilon C \|Du_m\|_{L^p(V)} \\ &\leq \varepsilon C \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} \\ &\leq \varepsilon C \sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty, \end{aligned}$$

denn nach Voraussetzung ist $\{u_m\}_m$ in $W^{1,p}(V)$ beschränkt. Hieraus folgt

$$u_m^\varepsilon \to u_m \qquad \text{in } L^1(V) \text{ für } \varepsilon \to 0, \text{ gleichmäßig in } m.$$

Hilfsmittel: Interpolationsungleichung

Seien $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ mit $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}$ für $u \in L^s(V) \cap L^t(V)$. Dann gilt $u \in L^r(V)$ und

$$\|u\|_{L^r(V)} \leq \|u\|_{L^s(V)}^{\theta} \|u\|_{L^t(V)}^{1-\theta}.$$

Setzt man $u = u_m^\varepsilon - u_m$, $r = q, s = 1, t = p^*$ und $\theta = \frac{p^*-q}{q(p^*-1)}$, so sind die obigen Voraussetzungen erfüllt und es folgt

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^{\theta} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta}. \tag{1}$$

Beweis von 2.: $u_m^\varepsilon \to u_m, \varepsilon \to 0$, in $L^q(V)$, glm. in m

Für den letzten Faktor gilt wegen der Sobolev-Ungleichung

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta} \leq C \|Du_m^\varepsilon - Du_m\|_{L^p(V)}^{1-\theta}$$

Letzteres ist beschränkt wegen

$$\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sup_m \|Du_m^\varepsilon - Du_m\|_{L^p(V)} < \infty.$$

Beweis von 2.: $u_m^\varepsilon \to u_m, \varepsilon \to 0$, in $L^q(V)$, glm. in m

Setzt man dies in (1) ein, so ergibt sich

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \tilde{C}\, \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta$$

für $\tilde{C} > 0$. Da $u_m^\varepsilon \to u_m$ in $L^1(V)$ für $\varepsilon \to 0$, gleichmäßig in m, folgt hieraus

$$u_m^\varepsilon \to u_m \qquad \text{in } L^q(V) \text{ für } \varepsilon \to 0, \text{ gleichmäßig in } m.$$

Hilfsmittel: Kompaktheitskriterium von Arzela-Ascoli

Sei $\{f_m\}_m$ eine Folge von Funktionen, $f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die

- punktweise gleichmäßig beschränkt
- und punktweise gleichmäßig stetig sind (in x und m).

Dann existiert eine Teilfolge $\left\{f_{m_j}\right\}_j$ und eine stetige Funktion f, so dass

$$f_{m_j} \to f \text{ punktweise gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von } \mathbb{R}^n.$$

Beweis von 3.: $\{u_m^\varepsilon\}_m$ hat konvergente Teilfolge in $L^q(V)$

Um Arzela-Ascoli anwenden zu können, zeigen wir:
Für alle $\varepsilon > 0$ ist die Folge $\{u_m^\varepsilon\}_m$ punktweise gleichmäßig beschränkt und gleichmäßig stetig.
Zur gleichmäßigen Beschränktheit:

$$\begin{aligned} |u_m^\varepsilon(x)| &\leq \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\,|u_m(y)|\,dy \\ &\leq \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^n} < \infty. \end{aligned}$$

Beweis von 3.: $\{u_m^\varepsilon\}_m$ hat konvergente Teilfolge in $L^q(V)$

Zur gleichmäßigen Stetigkeit: Wegen

$$Du_m^\varepsilon = D(\eta_\varepsilon * u_m) = (D\eta_\varepsilon) * u_m$$

gilt

$$\begin{aligned} |Du_m^\varepsilon(x)| &\leq \int_{B_\varepsilon(x)} |D\eta_\varepsilon(x-y)|\,|u_m(y)|\,dy \\ &\leq \|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} < \infty. \end{aligned}$$

Beweis von 4.: $\{u_m\}_m$ hat konvergente Teilfolge in $L^q(V)$

Arzela-Ascoli und $\operatorname{supp} u^\varepsilon_{m_j}$ kompakt $\Longrightarrow$ Es existiert eine Teilfolge $\left\{u^\varepsilon_{m_j}\right\}_j$, die gleichmäßig auf $\operatorname{supp} u^\varepsilon_{m_j} \subset V$ konvergiert.
V beschränkt $\Longrightarrow \left\{u^\varepsilon_{m_j}\right\}_j$ konvergiert in $L^q(V)$. Wir haben zuvor gezeigt:

$$u^\varepsilon_m \to u_m \qquad \text{in } L^q(V) \text{ für } \varepsilon \to 0, \text{ gleichmäßig in } m.$$

Mittels eines Diagonalarguments findet man eine Teilfolge $\{u_{m_j}\}_j$, die Cauchy-Folge in in $L^q(V)$ ist.
$L^q(V)$ vollständig $\Longrightarrow \{u_{m_j}\}_j$ konvergent.