Schwache Ableitung und Poincaréungleichung

Markus Dausch

LMU München

Hüttenseminar 26. - 29.06.2014

Testfunktionen

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen

$C_0^\infty(\Omega)$ ist der Raum der unendlich mal differezierbaren Funktionen von Ω nach $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in Ω. $supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$

$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ werden als *Testfunktionen* bezeichnet und haben die Eigenschaft, dass sie nah genug an $\partial\Omega$ den Wert Null annehmen.

$L^1_{loc}(\Omega)$ ist der Raum der lokal integrierbaren Funktionen.

Die schwache Ableitung

Für $u \in C^1(\Omega), \varphi \in C_0^\infty \Rightarrow \int_\Omega u\varphi' dx = [u\varphi]_\Omega - \int_\Omega u'\varphi dx$

Sind nun $u, v \in L^1_{loc}(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^d$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$
Wenn v

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi dx$$

$\forall \varphi$ erfüllt, dann nenne wir v die $|\alpha|$-te schwache Ableitungung von u und schreiben

$$v = D^\alpha u$$

Beispiele zur schwachen Ableitung

Es seien $\Omega = (0, 2)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1] \\ 1, & x \in (1, 2) \end{cases}$$

und $\alpha = 1$.
Dann ist

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ 0, & x \in (1, 2) \end{cases}$$

die schwache Ableitung von $f(x)$.

Denn $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x)\varphi'(x)dx &= \int_0^1 x\varphi'(x)dx + \int_1^2 \varphi'(x)dx \\
&= [x\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 \varphi(x) + [\varphi(x)]_1^2 \\
&= \varphi(1) - 0 - \int_0^1 \varphi(x)dx + \varphi(2) - \varphi(1) \\
&= -\int_0^1 \varphi(x) = -\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx
\end{aligned}$$

Definition Sobolevräume

Sind $\Omega \in \mathbb{R}$ offen, $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$, dann nennen wir

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega); |\alpha| \leq k\}$$

Sobolevraum mit Differenzierbarkeitsstufe k und Integrabilitätsexponent p.

Mit

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} (\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha|\leq k} ess\ sup_\Omega |D^\alpha u| & p = \infty \end{cases}$$

wird eine Norm auf den Sobolevraum definiert.

Eindeutigkeit

Lemma: Wenn die schwache Ableitung existiert, dann ist sie bis auf Nullmengen eindeutig bestimmt.

Beweis : Angenommen es gibt $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$, die $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{v} \varphi dx$$

Dann gilt:

$$\int_\Omega (v - \tilde{v}) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty$$

Und somit folgt mit dem Fundamentallemma der Variationsrechung:

$$\Rightarrow v - \tilde{v} = 0 \Rightarrow v \sim \tilde{v} \quad bzgl. L^1$$

Einschub (1)

Fundamentallemma der Variationsrechung:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, offen
$h \in L^1(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega h\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \Rightarrow \quad h = 0 \quad \textit{fast alle } x \in \Omega$$

Eigenschaften von schwachen Ableitungen

Seien $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, $|\alpha| \leq k$. Dann

(i) Unabhänigkeit von der Ableitungsreihenfolge:
$D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$

$$D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$$

$\forall$ *Multiindizes* α, β *mit* $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

(ii) Linearität:
$\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt: $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ und
$D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, solange $|\alpha| \leq k$.

(iii) Wenn $V \subseteq \Omega$ offen, dann $u \in W^{k,p}(V)$.

(iv) Ist $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, dann ist auch $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$ und es gilt:

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u \quad (\textit{Leibnizformel})$$

(v) Ist u differenzierbar, dann entspricht die schwache der klassischen Ableitung.

Beweis zu (i) Betrachten man ein belibiges $\varphi \in C_0^\infty$, dann ist $D^\beta \varphi \in C_0^\infty$ und so gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega D^\alpha u D^\beta \varphi dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^{\alpha+\beta} \varphi dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_\Omega D^{\alpha+\beta} u \varphi dx \\
&= (-1)^{|\beta|} \int_\Omega D^{\alpha+\beta} u \varphi dx
\end{aligned}$$

Die Poincaré-Ungleichung (Satz)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, zusammenhängend und offen mit einer Beschränkung von $\partial\Omega$ bezüglich C^1. Für $1 \leq p \leq \infty$ existiert ein C - abhängig von n, p und Ω - so dass für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt:

$$||u - (u)_\Omega||_{L^p(\Omega)} \leq C||Du||_{L^p(\Omega)}$$

wobei

$$(u)_\Omega = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega u(x)dx$$

der Mittelwert von u ist.

Beweis

Widerspruchsbeweis:

Annahme: Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Funktion $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$, die

$$||u_k - (u_k)_\Omega||_{L^p(\Omega)} > k||Du_k||_{L^p(\Omega)}$$

erfüllt.

Der Einfachheit halber betrachtet man das genormte Äquivalent dieser Funktionen - definiert als:

$$v_k := \frac{u_k - (u_k)_\Omega}{||u_k - (u_k)_\Omega||_{L^p(\Omega)}} \quad (k = 1, ...)$$

Für alle diese genormten Funktionen (v_k) gilt nun:

$$(v_k)_\Omega = 0, \quad ||v_k||_{L^p} = 1$$

Damit ergibt sich mit der Gleichung aus der Behauptung:

$$||Dv_k||_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{k} \quad k = (1, ...)$$

Und daraus folgt, dass die Funktionen $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ auch in $W^{1,p}(\Omega)$ beschränkt sind.

Einschub (2)

Nach dem Satz von Rellich-Kondrachov gilt:
$W^{1,p} \hookrightarrow L^p$ ist kompakt. Das bedeutet:

$$(v_k)_k \subset W^{1,p}, \quad \sup_k ||v_k||_{W^{1,p}} < \infty$$

$$\Rightarrow \exists (v_{k_j})_j, \quad v_{k_j} \xrightarrow{j \to \infty} v \quad \in L^p$$

$$v_{k_j} \longrightarrow v \quad \textit{in } L^p(\Omega)$$

Aufgrund der Normierung von v_k muss auch gelten $(v)_\Omega = 0$ und $||v||_{L^p(\Omega)} = 1$.

$$\begin{aligned} |\int_\Omega v\partial_{x_i}\varphi dx| &= \lim_{j\to\infty} |\int_\Omega v_{k_j}\partial_{x_i}\varphi dx| = \lim_{j\to\infty} |\int_\Omega \partial_{x_i} v_{k_j}\varphi dx| \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \int_\Omega |\partial_{x_i} v_{k_j}\varphi| dx \\ &\leq \lim_{j\to\infty} ||\partial_{x_i} v_{k_j}||_{L^p} ||\varphi||_{L^q} \leq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{k_j} ||\varphi||_{L^q} = 0 \end{aligned}$$

Also ist v konstant und das Mittel $(v)_\Omega = 0$; damit muss $v = 0$.
Aber: $\qquad ||v||_{L^p(\Omega)} = 1$.

WIDERSPRUCH