

Triangulierung und FEM

Jonathan Bischoff

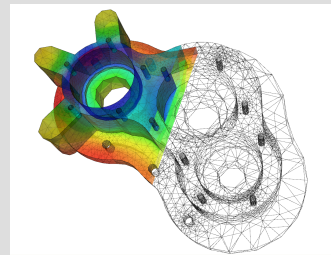
LMU München

Zillertal am 26.-29.06.2014



Übersicht

- Poisson-Gleichung
- Ritz-Galerkin Verfahren
- Finite Elemente
- Globale und Lokale Basiselemente



Die Poisson-Gleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega = 0$ und $f \in L^2(\Omega)$.

Gesucht ist die Lösung für $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, so dass gilt:

- $-\Delta u = f$ in Ω
- $u = 0$ auf $\partial\Omega$

Was heißt das?

- f als Kraft, u ein Membran oder allg. Bauteil
- f als Wärmequelle, u als Verteilung der Temperatur im Bauteil

Lösung über das Energiefunktional

Wenn man von einem eingespannten Membran ausgeht, folgt:

- $J(u)_{\text{spann}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$
- $J(u)_{\text{pot}} = - \int_{\Omega} f(x)u(x)dx$

$$\Rightarrow J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f(x)u(x)dx = \frac{1}{2} \|\nabla\|^2 - \langle f, u \rangle$$

Durch minimieren des Funktionals kann eine Lösung für die Poisson-Gleichung über dem Raum $H_0^1(G)$ gefunden werden.

Schwache Lösung

$\frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varphi\varepsilon) |_{\varepsilon=0} = 0$ Einsetzen in das Funktional

$$J(u)_{\text{pot}} \rightarrow \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} f(x)(u(x) + \varepsilon\varphi(x)) dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx$$

und

$$J(u)_{\text{spann}} \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla(u + \varepsilon\varphi)|^2 dx = 2 \int_{\Omega} \nabla(u + \varepsilon\varphi) \nabla\varphi$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u \nabla\varphi dx \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla\varphi dx - \int_{\Omega} f\varphi dx$$

Ritz-Galerkin Verfahren

Das Ritz-Galerkin Verfahren betrachtet nur endlich dimensionale Unterräume. Somit sucht man für $V_h \subset H_0^1(G)$ mit $\dim(V_h) < \infty$ ein $u_h \in V_h$ für alle Testfunktionen $\varphi \in V_h$:

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

Mit u_h erhofft man sich eine gute Approximation von u zu bekommen.

Orthogonalität

Im Folgenden ist $\langle u, v \rangle = \int uv dx$ das Skalarprodukt, dann gilt für $u \in H_0^1(\bar{\Omega})$ und $u_h, w \in V_h$

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla(u - u_h), \nabla w \rangle &= \langle \nabla u, \nabla w \rangle - \langle \nabla u_h, \nabla w \rangle \\
 &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx - \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla w dx \\
 &= \int_{\Omega} f w dx - \int_{\Omega} f w dx = 0
 \end{aligned}$$

In diesem Sinne steht der Fehler orthogonal zum Unterraum V_h .

Céa's Lemma

$$\|\nabla(u - u_h)\| = \min_{w \in V_h} \|\nabla(u - w)\| =: \text{dist}(u, V_h)$$

Damit hängt der Fehler von der Größe des endlichen Unterraums $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ ab.

Bildung eines Gleichungssystems

Sei nun $\{b_1, \dots, b_m\}$ eine Basis von V_h :

$$\forall \varphi \in V_h : \langle \nabla u_h, \nabla \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall 1 \leq j \leq m : \langle \nabla u_h, \nabla b_j \rangle = \int_{\Omega} f b_j dx$$

Somit bekommt man ein Gleichungssystem mit $m \times m$ Gleichungen

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^m u_{h,i} b_i(x)$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^m u_{h,i} \langle \nabla b_i, \nabla b_j \rangle = \int_{\Omega} f b_j dx$$

Gleichungssystem

Beim Galerkinverfahren erhalten wir also ein Gleichungssystem der Form:

$$Ax = y$$

$$x := \begin{pmatrix} u_{h,1} \\ \vdots \\ u_{h,m} \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} \langle f, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, b_m \rangle \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} \langle \nabla b_1, \nabla b_1 \rangle & \dots & \langle \nabla b_m, \nabla b_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \nabla b_1, \nabla b_m \rangle & \dots & \langle \nabla b_m, \nabla b_m \rangle \end{pmatrix}$$

Finite Elemente

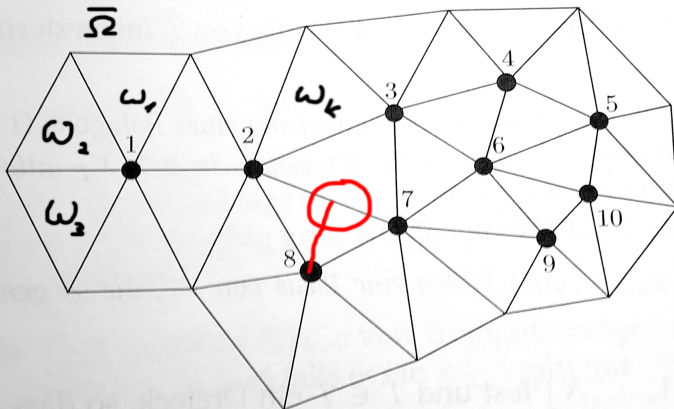
Nun muss eine geeignete Basis für V_h gefunden werden.

- Die Basis sollte aus möglichst einfache Basisfunktionen bestehen
- A dünn besetzt, d.h. $\langle \nabla b_i, \nabla b_j \rangle = 0$ für möglichst viele i, j .
- A nennt man Steifigkeitsmatrix.

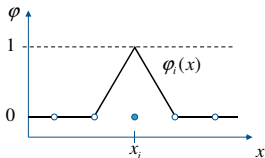
Das Gebiet Ω wird dabei in kleine Teilgebiete $\{\omega_1 \dots \omega_n\}$ unterteilt.

Triangulierung

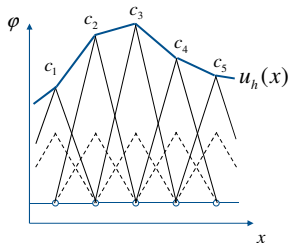
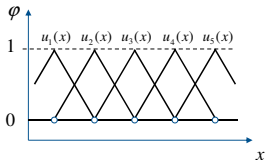
- Die Triangulierung von Ω muss konform sein
- Sie muss das ganze Gebiet $\bar{\Omega}$ überdecken $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^n \bar{\omega}_k$



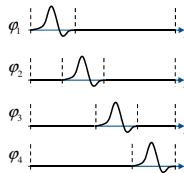
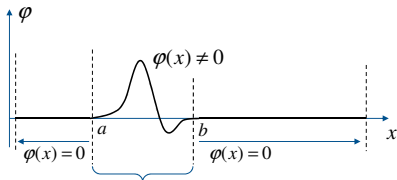
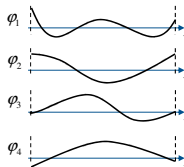
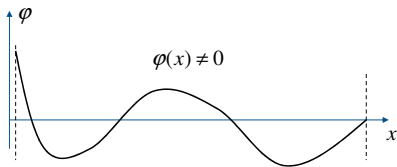
Finite Elemente



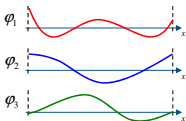
$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x)$$



Globale vs. lokale Basisfunktionen

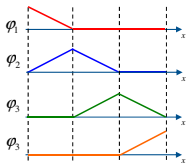


Einfluss lokaler Basisfunktionen auf die Steifigkeitsmatrix



$$A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Global (d.h. auf dem ganzen Gebiet) definierte Basisfunktionen führen immer auf voll besetzte Matrizen.

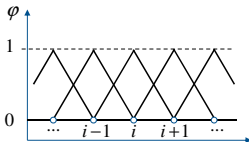


$$A = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Lokale Basisfunktionen (finite Elemente) führen dagegen auf schwach besetzte Matrizen!

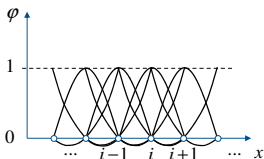
Einfluss lokaler Basisfunktionen auf die Steifigkeitsmatrix

Lineare lokale Basis (Hutfunktionen) führt auf eine tridiagonale Matrix



$$A = \begin{pmatrix} * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdot & * & 0 \\ \vdots & \ddots & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Quadratische lokale Basis führt auf eine pentadiagonale Matrix



$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 & & 0 \\ * & * & * & * & 0 & \\ * & * & * & * & \ddots & 0 \\ 0 & * & * & \cdot & * & * & 0 \\ 0 & \ddots & * & * & * & * & * \\ 0 & & 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Quellen

- G. Dziuk: Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen; 2010 Walter de Gruyter GmbH
- W. Arendt, K. Urban: Partielle Differenzialgleichungen Eine Einführung in analytische und numerische Methoden; 2010 Spektrum Akademischer Verlag
- R. Tomasi: Numerik der Poissongleichung
<http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~diening/ws13/huette/vortraege/tomasi.pdf> (Aufgerufen 24.06.2014)