Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 08.07.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Wiederholungsaufgaben

Aufgabe 1:
Beweisen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \exp\left(x^{\frac{n+1}{n}}\right)\, dx = e(e-1).$$

Aufgabe 2:
Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_1 + x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Minimieren Sie f auf $\partial B_1(0)$.

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} \cos(y_1 y_2) + y_1 - x_1 y_2 - 1 \\ \sin(y_1) - x_2 - y_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass offene Umgebungen U von $(0,-1)$ und V von $(0,1)$ sowie eine C^1-Funktion $g : U \to V$ existieren, so dass

$$\forall x \in U : F(x, g(x)) = 0$$

und

$$\forall x \in U\, \forall y \in V : (F(x,y) = 0 \Rightarrow y = g(x))$$

erfüllt sind.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $[Dg(0,-1)]$.

Aufgabe 4:

(a) Geben Sie alle Stammfunktionen des Vektorfeldes

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad v(x,y,z) := (3x^2y + y^2z, x^3 + 2xyz, xy^2 + 4z^3),$$

an.

(b) Sei nun

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) := (\cos(2\pi t), t^6, t^2 - t).$$

Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma v \cdot ds$.

Aufgabe 5:
Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion $f \in C^0([2,5])$ mit

$$f(x) = \int_2^x \ln(4 + |f(t)|)\, dt$$

gibt.

Aufgabe 6:
Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $y_0 \in Y$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y_0 \end{aligned}$$

stetig ist.