Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 01.07.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Präsenzaufgaben 11

Aufgabe 1:
Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sind $v, w : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Gradientenfelder, so ist auch $v + w$ ein Gradientenfeld.

(b) Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld, so ist auch fv ein Gradientenfeld.

Aufgabe 2:
Für $\alpha \geq 1$ sei

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) := (t^\alpha, t),$$

und

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad v(x,y) := (y^3, x^2).$$

Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma v \cdot ds$.

Aufgabe 3:
Sei $X := \{a, b, c\}$ und $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, X\}$.

(a) Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X?

(b) Was ist die kleinste Topologie auf X, die $\mathcal{T}$ enthält?

Aufgabe 4:
Es sei $\mathcal{T} := \{A \subseteq \mathbb{R} : A^{\complement} \text{ ist abzählbar}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 5:
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und $K \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass K kompakt ist.