Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 24.06.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Präsenzaufgaben 10

Aufgabe 1:
Berechnen Sie $\int_\Gamma f\,ds$ für

(a) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| = 1\}$ und $f(x) = x_1 x_2$ sowie

(b) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| = 2, x_2 \geq 0\}$ und $f(x) = x_1 + x_2$.

Aufgabe 2:
Wir betrachten eine Kette mit konstanter Dichte 1 in der Form des Parabelstücks $\Gamma := \{(t, t^2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \in [0,1]\}$. In der Vorlesung wurde bereits die Masse der Kette $\mu(\Gamma) = \frac{1}{4}(2\sqrt{5} + \sinh^{-1}(2)) \approx 1,48$ berechnet. Berechnen Sie nun den Schwerpunkt

$$S(\Gamma) := \tfrac{1}{\mu(\Gamma)} \int_\Gamma x\rho(x)\,ds.$$

Hinweis: Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(4t^2+1)^{3/2}$. Benutzen Sie außerdem das unbestimmte Integral $\int t^2\sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{64}(2\sqrt{4t^2+1}(8t^3+t) - \sinh^{-1}(2t)) + C$.

Aufgabe 3:
Seien $n \in \mathbb{N}$, $c > 0$ und sei $\gamma : [0,c] \to \mathbb{R}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve. Zeigen Sie: Ist die Krümmung von γ konstant 0, so liegt γ auf einer Geraden.

Aufgabe 4:
Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $s_1 := 2$ und für $n \geq 2$ durch

$$s_n := \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{s_{n-1}}{2}\right)^2}}$$

definiert. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} 2^n s_n = 2\pi.$$

Hinweis: Berechnen Sie den Umfang des regulären 2^n-Ecks mit Umkreis $\partial B_1(0)$.