Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 10.06.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Präsenzaufgaben 8

Aufgabe 1:
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(t) := \begin{cases} t + 2t^2 \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) f ist überall differenzierbar und es gilt $f'(0) = 1$.

(b) f ist in keiner Umgebung von 0 injektiv.

Warum ist das kein Widerspruch zum lokalen Umkehrsatz?

Aufgabe 2:
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei durch

$$f(x) := \begin{pmatrix} e^{x_1} \cos x_2 \\ e^{x_1} \sin x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie den Bildbereich von f.

(b) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass f lokal um jeden Punkt von $\mathbb{R}^2$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

(d) Sei $a := (0, \pi/3)$, $b := f(a)$ und sei g die lokale Inverse von f, definiert in einer Umgebung von b, so dass $g(b) = a$ gilt. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $[Dg(b)]$.

Aufgabe 3:
Wir definieren

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^5 + xy + e^y - 1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass eine Umgebung $U \times V \subset \mathbb{R}^2$ von 0 und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$ mit $g(0) = 0$ existieren, so dass $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie das Minimum von

$$\begin{aligned} f : (0,\infty)^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

unter der Nebenbedingung $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$.