Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 03.06.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Präsenzaufgaben 7

Aufgabe 1:
Wir betrachten die Funktionen

(a) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{3}(4 - x^2)$ und

(b) $g : [3,5] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(x) + 3$.

Untersuchen Sie jeweils, ob

(a) die Funktionen Kontraktionen darstellen,

(b) die Inklusion $f([0,2]) \subseteq [0,2]$ bzw. $g([3,5]) \subseteq [3,5]$ besteht,

(c) der Banach'sche Fixpunktsatz anwendbar ist und

(d) die Funktionen Fixpunkte auf ihrem Definitionsbereich haben.

Aufgabe 2:
Die Funktion $T : C^0([-1,1],\mathbb{R}) \to C^0([-1,1],\mathbb{R})$ sei für $f \in C^0([-1,1],\mathbb{R})$ durch

$$(Tf)(x) := \frac{1}{3} \int_{-1}^{x} f(s)\, ds, \qquad x \in [-1,1],$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $f = 0$ die einzige Lösung der Gleichung $Tf = f$ ist.

Aufgabe 3:
Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \log(1 + e^x).$$

Zeigen Sie: f erfüllt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ die Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

aber f besitzt keinen Fixpunkt.

Aufgabe 4:
Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und sei $T : X \to X$ eine Abbildung, welche für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ die Ungleichung

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

erfüllt. Beweisen Sie, dass T genau einen Fixpunkt besitzt.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : X \to [0, \infty)$, $f(x) := d(x, T(x))$.