Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 27.05.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Präsenzaufgaben 6

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 2x_1^3 - 3x_1^2 + 2x_2^3 + 3x_2^2.$$

Aufgabe 2:
Sei $x \in \mathbb{R}^2$ kritischer Punkt von $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und A die Hessematrix von f in x. Wir definieren $D := \det A$ und $S := \operatorname{spur} A$. Beweisen Sie:

(a) $D > 0$ und $S > 0 \Longrightarrow x$ ist striktes, lokales Minimum.

(b) $D > 0$ und $S < 0 \Longrightarrow x$ ist striktes, lokales Maximum.

Erinnerung an das Hurwitz-Kriterium aus der Linearen Algebra:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und für $k \in \{1, \dots, n\}$ sei A_k die jeweils linke obere $k \times k$-Teilmatrix. Dann gilt

(a) A ist positiv definit $\Longleftrightarrow$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ ist $\det(A_k) > 0$.

(b) A ist negativ definit $\Longleftrightarrow$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ ist $(-1)^k \det(A_k) > 0$.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie von

$$\begin{aligned} f : (0, \infty) \times (0, \infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_1^{x_2} \end{aligned}$$

die Taylorreihe um den Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bis zu den Gliedern einschließlich dritter Ordnung.

Aufgabe 4:
Seien $0 < r < R$. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(u) := \begin{pmatrix} (R + r \sin u_2) \cos u_1 \\ r \cos u_2 \\ (R + r \sin u_2) \sin u_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Beschreiben Sie das Bild von f.

(b) Es sei $g := f_3$ die dritte Komponente von f. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von g.