Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 13.05.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Präsenzaufgaben 4

Aufgabe 1:
Wo ist die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x_1 x_2| \end{aligned}$$

partiell differenzierbar, wo (total) differenzierbar?

Aufgabe 2:
Berechnen Sie für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ für

(a) $f(x) := \|x\|_2$,

(b) $f(x) := \|x\|_2^{-n}$ und

(c) $f(x) := \exp(-\|x\|_2^{-2})$.

Aufgabe 3:
Im Folgenden soll der Zusammenhang zwischen komplexer Differenzierbarkeit und totaler Differenzierbarkeit untersucht werden, wobei wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren.

(a) Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und sei $z_0 \in D$. Zeigen Sie: Ist f bei z_0 komplex differenzierbar, so ist f bei z_0 auch total differenzierbar.

(b) Betrachte die komplexe Konjugation $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$. Zeigen Sie, dass g nirgends komplex differenzierbar ist, aber überall total differenzierbar ist. Geben Sie die totale Ableitung explizit an.