Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 06.05.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Präsenzaufgaben 3

Aufgabe 1:
Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume mit $E \neq \{0\}$ und $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Zeigen Sie

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in E} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{\|x\|_E \leq 1 \\ x \neq 0}} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Ax\|_F.$$

Aufgabe 2:
Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Berechnen Sie die Operatornorm der von M induzierten linearen Abbildung bezüglich der Norm $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ auf $\mathbb{R}^2$.
Hinweis: Verwenden Sie die vorige Aufgabe und machen Sie sich klar, wie der Rand des Einheitsballs im $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ aussieht.

Aufgabe 3:
Für $s \in (1, \infty)$ sei $\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty 1/n^s$ die Zeta-Funktion. Zeigen Sie

$$\zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\, dx,$$

wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ die Abrundungsfunktion bezeichne.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie, für welche $s \in (0, \infty)$ die Reihe

$$\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n \log n (\log \log n)^s}$$

konvergiert.