Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 29.04.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Präsenzaufgaben 2

Aufgabe 1:
Für $n \in \mathbb{N}$ seien f_n und f auf $I \subseteq \mathbb{R}$ integrierbarer Funktionen und definiere den Durchmesser von I als $\operatorname{diam} I := \sup\{|x-y| \,:\, x, y \in I\}$.
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise und $\operatorname{diam} I < \infty \Longrightarrow \int\limits_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

(b) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ punktweise und $\operatorname{diam} I = \infty \Longrightarrow \int\limits_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

(c) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig und $\operatorname{diam} I < \infty \Longrightarrow \int\limits_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

(d) $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig und $\operatorname{diam} I = \infty \Longrightarrow \int\limits_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Aufgabe 2:
Sei f integrierbar auf $[-1,1]$ und stetig in 0. Beweisen Sie

$$\frac{n}{2}\int\limits_{-1/n}^{1/n} f(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} f(0).$$

Aufgabe 3:
Wir definieren

$$\begin{aligned} f : [-1,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass f integrierbar ist und berechnen Sie den Wert des Integrals.

Aufgabe 4:
Für $a > 0$ sei $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare und ungerade Funktion, das heißt für alle $x \in [-a,a]$ gelte $f(-x) = -f(x)$. Beweisen Sie, dass dann

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Aufgabe 5: (a) Bestimmen Sie für $k \in \mathbb{N}_0$ den Wert des Integrals

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{2k} \sin x \, dx.$$

(b) Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$a_k := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{2k+1} \sin x \, dx.$$

Leiten Sie für $k \in \mathbb{N}$ die Rekursionsformel

$$a_k = (2k+1)\frac{\pi^{2k}}{2^{2k-1}} - (2k+1) \cdot 2k \cdot a_{k-1}$$

her und berechnen Sie a_0 und a_1.