Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 15.04.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Präsenzaufgaben 1

Aufgabe 1:
Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}.$$

Hinweis: Differenzieren Sie die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $x \in (-1, 1)$.

Aufgabe 2:
Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ folgende Identität:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} z^k = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Induktion nach n und gehen Sie ähnlich wie in Aufgabe 1 vor.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

nicht auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 4:
Gegeben seien eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Funktion f wie folgt:

a) $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = 1_{(0,1/n)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (0, 1/n), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$
   $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \exp(-x^2 + 1/n)$,
   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(-x^2)$.
c) Seien $U, V \subset \mathbb{C}$. Weiter sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $g_n : U \to V$, die gleichmäßig gegen $g : U \to V$ konvergiert, und $h : V \to \mathbb{C}$ sei eine gleichmäßig stetige Funktion. Es sei $f_n := h \circ g_n$ und $f := h \circ g$.

Verifizieren Sie jeweils, dass f_n punktweise gegen f konvergiert. Untersuchen Sie darüber hinaus, ob f_n gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 5:
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $Z_n := \{k/n : k \in \{0, 1, \ldots, n\}\}$ die äquidistante Zerlegung des

Intervalls $[0,1]$ mit Maschenweite $1/n$. Weiter sei $\alpha \in \{1,2,3\}$. Bestimmen Sie für das Integral

$$\int_0^1 t^\alpha \, dt$$

die Ober- und Untersumme bezüglich der Zerlegung Z_n und berechnen Sie damit den Wert des Integrals.