Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 01.07.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 12

Aufgabe 1: **(4+1) Punkte**

(a) Geben Sie alle Stammfunktionen des Vektorfeldes

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad v(x,y,z) := (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy),$$

an.

(b) Sei nun

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) := (\cosh(\sin(2\pi t)), t^{42}, \sinh(t)\sinh(1-t)).$$

Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma v \cdot ds$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der das Hausdorff-Axiom erfüllt, d.h. für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt eine Umgebung U_x von x und eine Umgebung U_y von y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ die Menge $\{x\}$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$. Wir definieren das Innere $\mathring{A}$ und den Abschluss $\overline{A}$ von A durch

$$\mathring{A} := \bigcup_{\substack{T \in \mathcal{T} \\ T \subset A}} T \qquad \text{und} \qquad \overline{A} := \bigcap_{\substack{T^{\complement} \in \mathcal{T} \\ A \subset T}} T.$$

Man überlegt sich leicht, dass $\mathring{A}$ offen und $\overline{A}$ abgeschlossen ist. Außerdem definieren wir den Rand von A durch $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$. Berechnen Sie nun $\overline{\mathring{\mathbb{Q}}}$, $\mathring{\overline{\mathbb{Q}}}$ und $\partial\mathbb{Q}$ bezüglich der von der Metrik erzeugten Topologie auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung von 0 und sei $v : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein C^1-Vektorfeld. Für $r > 0$ sei weiter

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma_r(t) := r(\cos t, \sin t).$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma_r} v \cdot ds = \operatorname{rot} v(0) = \partial_1 v_2(0) - \partial_2 v_1(0)$$

gilt. *Hinweis*: Verwenden Sie, dass sich v als

$$v(x) = v(0) + Dv(0)x + |x| R(x)$$

schreiben lässt, wobei $\lim_{x \to 0} R(x) = 0$ gilt.

Abgabe bis Dienstag, den 08.07.2014 um 12:15 Uhr