Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 24.06.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 11

Aufgabe 1: **(1,5+1,5+2) Punkte**

Gegeben sei ein Drahtstück mit der Spur

$$\Gamma := \{(t, \tfrac{2}{3}t^{3/2}) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1]\}$$

und der Massendichte

$$\rho : \Gamma \to \mathbb{R}, \qquad \rho(t, \tfrac{2}{3}t^{3/2}) = (1+t).$$

Berechnen Sie folgende Größen:

(a) die Länge des Drahtes $L := \int_\Gamma ds$;

(b) die Masse des Drahtes $M := \int_\Gamma \rho(x(s), y(s))\, ds$;

(c) die x-Koordinate des Schwerpunkts $x_C := \frac{1}{L}\int_\Gamma x(s)\rho(x(s), y(s))\, ds$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre, nicht notwendigerweise nach Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve mit Bogenlängenfunktion

$$s(t) := \int_a^t |\alpha'(\tau)|\, d\tau, \qquad t \in [a,b].$$

Weiter sei $\beta := \alpha \circ s^{-1}$ die zugehörige Parametrisierung nach Bogenlänge. Dann ist die Krümmung von α zum Zeitpunkt $t \in [a,b]$ durch

$$\kappa(t) := |\beta''(s(t))|$$

definiert. Beweisen Sie die Formel

$$\kappa(t) = \frac{|\det(\alpha'(t), \alpha''(t))|}{|\alpha'(t)|^3} = \frac{|\alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_1''(t)\alpha_2'(t)|}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Gleichungen

$$(s^{-1})'(s(t)) = \frac{1}{s'(t)},$$
$$(s^{-1})''(s(t)) = -\frac{s''(t)}{s'(t)^3}.$$

Aufgabe 3: **(3+2) Punkte**

Es sei

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad f(t) := (a \cos t, b \sin t),$$

die Ellipse mit den Halbachsen $a \geq b > 0$.

(a) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der Schmiegekreise in den Punkten $A := (a, 0)$ und $B := (0, b)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Formel aus Aufgabe 2.

(b) Zeigen Sie, dass die beiden Mittelpunkte aus (a) und der Punkt $C := (a, b)$ auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 4: **(1+1,5+2,5) Punkte**

Zeigen Sie, dass $\mathcal{BV}([0, 1])$ ein Banachraum bezüglich der Norm

$$\|f\|_{\mathcal{BV}([0,1])} := |f(0)| + \mathrm{Var}(f, [0, 1])$$

ist. Zeigen Sie dafür die folgenden Aussagen für jede Cauchyfolge $(f_n)_n \subset \mathcal{BV}([0, 1])$:

(a) Der Grenzwert von $f_n(0)$ existiert.

(b) Für alle $x \in [0, 1]$ existiert der Grenzwert von $f_n(x)$.

(c) Es gibt ein $f \in \mathcal{BV}([0, 1])$ mit $\|f - f_n\|_{\mathcal{BV}([0,1])} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.