Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 10.06.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 9

Aufgabe 1: **(2,5+2,5) Punkte**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei durch

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} x_1 y_2 - 4x_2 + 2e^{y_1} + 3 \\ 2x_1 - x_3 + y_2 \cos y_1 - 6y_1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter sei $a := (3,2,7)$ und $b := (0,1)$.

(a) Zeigen Sie, dass eine C^1-Abbildung g existiert, welche in einer Umgebung von a definiert ist, so dass $g(a) = b$ und $f(x, g(x)) = 0$ für alle x im Definitionsbereich von g gilt.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $[Dg(a)]$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Es sei $B := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der folgenden Funktion:

$$f : B \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x_1^2 + x_2^3 - x_2^2 - x_2.$$

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Berechnen Sie die Operatornorm von A bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$. *Hinweis*: Es gilt $|A|^2 = \max\limits_{|x|=1} |Ax|^2$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein (surjektiver) C^1-Diffeomorphismus und sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ verschwindet. Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die „gestörte" Abbildung $f + \lambda g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.
Hinweis: Betrachten Sie $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + \lambda g \circ f^{-1}$, wobei $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ die Identität auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Abgabe bis Dienstag, den 17.06.2014 um 16:00 Uhr