Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 03.06.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 8

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_1 x_2 x_3 + \tfrac{1}{x_1} + \tfrac{1}{x_2} + \tfrac{1}{x_3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}\sin(x_1 + x_2) - x_1 &= 0, \\ \tfrac{1}{4} e^{-(x_1^2 + x_2^2)} - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Zeigen Sie Existenz und Eindeutigkeit einer stetigen Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die für alle $x \in [0,1]$ der Gleichung

$$f(x) = x + \tfrac{1}{2}\sin(f(x))$$

genügt.

Aufgabe 4: **(2,5+2,5) Punkte**

Es seien E und F Banachräume. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathrm{inv} : \mathcal{GL}(E,F) &\to \mathcal{L}(F,E) \\ A &\mapsto A^{-1}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{inv} : \mathcal{GL}(E,F) \to \mathcal{L}(F,E)$ ist stetig, also $T^{-1} \xrightarrow{T \to T_0} T_0^{-1}$.

(b) $\mathrm{inv} : \mathcal{GL}(E,F) \to \mathcal{L}(F,E)$ ist differenzierbar mit $D\,\mathrm{inv}(T_0)T = -T_0^{-1} T T_0^{-1}$.

Abgabe bis Mittwoch, den 11.06.2014 um 11:45 Uhr