Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 20.05.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: **(1+2+1+1) Punkte**

Gegeben ist die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_1^2 x_2^2. \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinien von f.

(b) Bestimmen und skizzieren Sie das Vektorfeld

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto \nabla f(x). \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $[dg(x)]$.

(d) Für eine Funktion

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (h_1(x), h_2(x)) \end{aligned}$$

ist die Rotation durch die Zuordnung

$$\operatorname{rot} h(x) = \partial_1 h_2(x) - \partial_2 h_1(x)$$

definiert. Bestimmen Sie $\operatorname{rot} g(x)$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Gegeben ist die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_1^2 x_2 \sin(x_1 x_2). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$ mit $|\alpha| \leq 2$ die partiellen Ableitungen $\partial^\alpha f(x)$.

Aufgabe 3: **(2+3) Punkte**

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} |x|^2 \sin\left(\frac{1}{|x|}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix (also den Gradienten) von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(b) Zeigen Sie: f ist bei $x = 0$ total differenzierbar, aber die partiellen Ableitungen $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ sind nicht stetig bei $x = 0$.

Aufgabe 4: **(2+2+1) Punkte**

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$, sei $U := (a, b) \times (c, d)$ und sei $u \in (a, b)$. Weiter sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche nach der zweiten Variablen stetig differenzierbar ist, und $g : U \to \mathbb{R}$ sei durch

$$g(x, y) := \int_u^x f(t, y)\, dt$$

definiert.

(a) Beweisen Sie, dass $\partial_2 g$ existiert und durch

$$\partial_2 g(x, y) = \int_u^x \partial_2 f(t, y)\, dt$$

gegeben ist.

Hinweis: Schreiben Sie den Differenzenquotienten mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung um und vertauschen Sie dann Limes und Integral (mit Begründung).

(b) Zeigen Sie, dass g stetig differenzierbar ist.

(c) Nun sei $a = c$ und $b = d$, also $U = (a, b)^2$. Folgern Sie

$$\frac{d}{dx} \int\limits_u^x f(t, x)\, dt = \frac{d}{dx} g(x, x) = f(x, x) + \int_u^x \partial_2 f(t, x)\, dt.$$