Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 13.05.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: **(2+1+3) Punkte**

Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien durch

$$f(x) := \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

und

$$g(x) := \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

definiert.

(a) Sei $x \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie direkt mit der Definition der totalen Ableitung, dass $Df(x)$ existiert und geben Sie $Df(x)$ explizit an.

(b) Zeigen Sie direkt mit der Definition der totalen Ableitung, dass $Dg(0)$ existiert und geben Sie $Dg(0)$ explizit an.

(c) Berechnen Sie $\partial_1 \partial_2 g(0)$ und $\partial_2 \partial_1 g(0)$.

Aufgabe 2: **(1+1+2+2) Punkte**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

(a) f ist am Punkt 0 stetig.

(b) Für alle $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existiert die Richtungsableitung $D_u f(0)$ am Punkt 0.

(c) f ist am Punkt 0 nicht total differenzierbar.

(d) f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig partiell differenzierbar.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Es seien $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, sodass

$$c_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c_2 \|x\|_a$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 4: **(2+2) Punkte**

Wir definieren die Folgenräume

$$\ell^1(\mathbb{N}) := \{(a_i)_i \text{ Folge } : \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty\} \text{ und } \ell^2(\mathbb{N}) := \{(a_i)_i \text{ Folge } : \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty\}.$$

Dabei macht $\|(a_i)_i\|_{\ell^1(\mathbb{N})} := \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ den Vektorraum $\ell^1(\mathbb{N})$ zu einem Banachraum, ebenso wie $\|(a_i)_i\|_{\ell^2(\mathbb{N})} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ den Vektorraum $\ell^2(\mathbb{N})$ zu einem Banachraum macht. Nun definieren wir Abbildungen

$$\begin{aligned} f : \ell^2(\mathbb{N}) &\to \ell^1(\mathbb{N}) \\ (a_i)_i &\mapsto (\tfrac{1}{2}a_i^2)_i \end{aligned}$$

und für eine feste Folge $b := (b_i)_i \in \ell^2(\mathbb{N})$

$$\begin{aligned} A_b : \ell^2(\mathbb{N}) &\to \ell^1(\mathbb{N}) \\ (a_i)_i &\mapsto (b_i a_i)_i. \end{aligned}$$

Zeigen Sie nun:

(a) Für eine feste Folge $b := (b_i)_i \in \ell^2(\mathbb{N})$ ist $A_b : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$ linear und beschränkt.

(b) Konvergiert $a := (a_i)_i \in \ell^2(\mathbb{N})$ gegen die Folge $b := (b_i)_i \in \ell^2(\mathbb{N})$ bezüglich der $\ell^2(\mathbb{N})$-Norm (also $\|a - b\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \to 0$), dann konvergiert

$$\frac{f(a) - f(b) - A_b(a - b)}{\|a - b\|_{\ell^2(\mathbb{N})}} \to 0$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{\ell^1(\mathbb{N})}$.

Bemerkung: Damit haben Sie gezeigt, dass A_b das totale Differential von f in b ist.