Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 29.04.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: **(2+1+1+2) Punkte**

Berechnen Sie

$$\int_0^\pi \cos(x)\sin(2x)\,dx, \quad \int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{4x-e^{2x}}\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi/2} \sin(x)\log(\sin(x))\,dx$$

Die Funktionen $g(x) := \log(x)$ und $g(x) := \arccos(x) := \cos^{-1}(x)$ sind nützlich. Achten Sie insbesondere bei den uneigentlichen Integralen auf Formalismus.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C^{n+1}(I)$. Beweisen Sie für $x, x_0 \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Aufgabe 3: **(2+3) Punkte**

(a) Zeigen Sie, dass für alle $c > 0$ das Integral $\int_c^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$ existiert.

(b) Seien nun $a, b > 0$. Beweisen Sie

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\,dx = \log \tfrac{b}{a}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos y}{y}\,dy.$$

Aufgabe 4: **(2+2+2) Punkte**

Es sei $f \in C^1([a,b])$ und $\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Wir interessieren uns für Abschätzungen der Form

$$\|f\|_\infty^2 \le c\,(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2). \tag{1}$$

(a) Beweisen Sie (1) mit $c = 1$ für Funktionen, die $f(a) = 0$ erfüllen.
Hinweis: Wenden Sie den Hauptsatz auf f^2 an.

(b) Beweisen Sie (1) mit $c = \frac{1}{2}$ für Funktionen, die $f(a) = f(b) = 0$ erfüllen.

(c) Beweisen Sie (1) mit $c = 1$ für Funktionen, die $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ erfüllen.

Abgabe bis Dienstag, den 06.05.2014 um 12:15 Uhr