Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 10.04.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{e-1}{e} \right)^n = 1.$$

Hinweis: Leiten Sie zunächst mit Hilfe der geometrischen Reihe für $|x| < 1$ die Beziehung $-\ln(1-x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ her.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise und monoton wachsend (d.h. für alle $x \in [0,1]$ gelte $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$) die konstante Nullfunktion konvergiere.
Beweisen Sie, dass f_n dann auch gleichmäßig gegen die konstante Nullfunktion konvergiert.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Zeigen Sie beispielsweise mit

$$\begin{aligned} f_n : (0,1) &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto -\frac{1}{nx}, \end{aligned}$$

dass auf die Kompaktheit des Definitionsbereichs in Aufgabe 2 nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Zeigen Sie beispielsweise mit

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \begin{cases} 2nx & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2n}], \\ 2(1-nx) & \text{für } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \text{ und} \\ 0 & \text{für } x \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases} \end{aligned}$$

dass auf die Monotonie in Aufgabe 2 nicht verzichtet werden kann.

Abgabe bis Dienstag, den 15.04.2014 um 12:15 Uhr