Die p-Laplace-Gleichung: Existenz einer schwachen Lösung

Maximilian Wank

LMU München

Zillertal / 21.06.2012 – 24.06.2012

Von der klassischen zur schwachen Formulierung

Ausgangspunkt: Existiert $u \in X = \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + su = f \text{ in } \Omega \text{ und} \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $s \geq 0$?

Übergang zur *schwachen Formulierung*: Existiert $u \in X$ mit

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi + su\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in X$$

für $f \in (L^p(\Omega))^* \cong L^{p'}(\Omega)$ für $p' = \frac{p}{p-1}$?

Operatorgleichung

Definiere Operator A via

$$\langle Au, \varphi \rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi + su\varphi \, dx \qquad \forall u, \varphi \in X$$

und Funktional b via $\langle b, \varphi \rangle := \int_\Omega f \varphi \, dx$ für alle $\varphi \in X$.

Lemma

Für $p \geq \frac{2d}{d+2}$ *gilt*

1. $A : X \to X^*$ *und* A *ist beschränkt.*
2. $b \in X^*$ *und die schwache Formulierung ist äquivalent zu* $Au = b$.

Beweis von 1.

Setze $X := \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ und $\|u\|_X = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$. Es gilt

$$|\langle Au, \varphi\rangle| \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)} + s\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Einbettungen:

- $\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ für $1 \leq p < d$ und $p \geq \frac{2d}{2+d}$
- $\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ für $p \geq d$

$$\Rightarrow \forall \varphi \in X \text{ und } p \geq \frac{2d}{d+2}: \ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)}$$

Also

$$|\langle Au, \varphi\rangle| \leq c(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + s\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)})\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)}$$

Beweis von 1. und 2.

$$\|Au\|_{X^*} = \sup_{\substack{\varphi \in X \\ \|\varphi\| \leq 1}} |\langle Au, \varphi \rangle| \leq c(\|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + s\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)})$$

Damit $Au \in X^*$ und A beschränkt!

Zu 2.:

$$\|b\|_{X^*} = \sup_{\substack{\varphi \in X \\ \|\varphi\| \leq 1}} |\langle b, \varphi \rangle| \leq \sup_{\substack{\varphi \in X \\ \|\varphi\| \leq 1}} \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Damit $b \in X^*$ und

$$(\forall \varphi \in X : \ \langle Au, \varphi \rangle = \langle b, \varphi \rangle) \Leftrightarrow Au = b.$$

Bemerkung zum letzten Lemma: Für $s = 0$ ist $p \geq \frac{2d}{d+2}$ nicht notwendig.

Untersuchung von A ergibt:

Lemma

A ist strikt monoton, koerziv und stetig.

Strikte Monotonie von A:

Setze $\mathbf{g} = (g^1, \ldots, g^d) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ via $\zeta \mapsto |\zeta|^{p-2}\zeta$.

Damit für $u \neq v \in X$:

$$\begin{aligned}\langle Au - Av, u - v\rangle &= \int_\Omega \sum_{i=1}^d (g^i(\nabla u) - g^i(\nabla v))(\partial_i u - \partial_i v)\, dx + s\|u - v\|_{L^2}^2 \\ &\geq \int_\Omega \underbrace{\sum_{i=1}^d \int_0^1 \frac{d}{d\tau} g^i(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v))\, d\tau (\partial_i u - \partial_i v)}_{\geq c|\nabla u - \nabla v|^2 \int_0^1 |\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2}\, d\tau > 0}\, dx \\ &> 0\end{aligned}$$

Koerzivität von A:

Für $u \in X$ gilt

$$\langle Au, u \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^p + s|u|^2 \, dx = \|\nabla u\|_{L^p}^p + s\|u\|_{L^2}^2 \geq \|\nabla u\|_{L^p}^p.$$

Damit ist insgesamt

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_X} \geq \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \to \infty \text{ für } \|u\|_X \to \infty,$$

falls $p > 1$.

Stetigkeit von A: (1/2)

Sei x_n Folge mit $u_n \longrightarrow u$ in X ($\Rightarrow \nabla u_n \to \nabla u$ in $L^p(\Omega)$).

Definiere den *Nemyckii–Operator* **F** via

$$\begin{aligned}\mathbf{F} : (L^p(\Omega))^d &\to (L^{p'}(\Omega))^d \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{g}(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^{p-2}\mathbf{u}\end{aligned}$$

$\mathbf{F}$ ist stetig $\Rightarrow \mathbf{F}(\nabla u_n) \to \mathbf{F}(\nabla u)$ in $(L^{p'}(\Omega))^d$.

$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ für $p \geq \frac{2d}{2+d}$ sichert $\|\varphi\|_{L^2} \leq c\|\varphi\|_X$.

Stetigkeit von A: (2/2)

Daher

$$\begin{aligned}\langle Au_n - Au, \varphi\rangle &= \int_\Omega (\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)) \cdot \nabla\varphi \, dx + s \int_\Omega (u_n - u)\varphi \, dx \\ &\leq c \|\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}} \|\nabla\varphi\|_{L^p} + s\|u_n - u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \\ &\leq c(\|\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}} + \|u_n - u\|_X)\|\varphi\|_X,\end{aligned}$$

also gesamt

$$\begin{aligned}\|Au_n - Au\|_{X^*} &= \sup_{\substack{\varphi\in X \\ \|\varphi\|\leq 1}} |\langle Au_n - Au, \varphi\rangle| \\ &\leq c(\underbrace{\|\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}}}_{\to 0} + \underbrace{\|u_n - u\|_X}_{\to 0}) \to 0\end{aligned}$$

Rückblick:

Theorem (Browder, Minty)

Sei X ein seperabler, reflexiver, reeller Banachraum mit Basis $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Weiters sei $A : X \to X^*$ ein strikt monotoner, koerziver, stetiger Operator. Dann existiert für alle $b \in X^*$ eine eindeutige Lösung $u \in X$ von

$$Au = b.$$

- $X = \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ ist seperabler, reflexiver, reeller Banachraum.
- Nach den Lemmata ist $A : X \to X^*$ strikt monotoner, koerziver, stetiger Operator.

Existenz der schwachen Lösung

Theorem

Sei $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt mit lipschitzstetigem Rand und* $f \in L^{p'}(\Omega)$, $s \geq 0$ *und* $p \geq \frac{2d}{2+d}$.
Dann gibt es genau ein $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ *mit*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi + s u \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega).$$