Lebesgue- und Sobolevräume

Stefan Röttinger

22.06.2012

Outline

Kurze Einführung in das Lebesguemaß

Ziel: Definition einer Funktion μ, die möglichst vielen $A \in \mathbb{R}^n$ einen Wert $\mu(A) \in \mathbb{R}_+ \cup (+\infty)$ zuordnet

μ soll folgende Bedingungen erfüllen:

i) $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(\mathbb{R}^n) = +\infty$;

ii) $Q \in R^n$ n-dim., abgeschl. Quader

$$\Rightarrow \mu(Q) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

iii) $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $B := v + A \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$

iv) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, falls $A \cap B = \emptyset$
(endliche Additivität)

Motivation für die Definition von Lebesgue-Räumen (1)

- Problem: Bestimmung der Minima von Funktionalen in ∞-dim Räumen, z.B.

$$J[u] := \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \longrightarrow Min!$$

  in einer Klasse von Funktionen $\mathcal{C}$.
- Bolzano-Weierstrass greift nicht wegen $dim\, \mathcal{C} = \infty$;
- Ansatz: $\mathcal{C}$=stetig-differenzierbaren Funktionen mit Norm

$$\|u\|_2 := \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

- ABER: Ein solcher Raum ist nicht einmal vollständig.
- Lösung: $\mathcal{C}$ soll neben stetig-differenzierbaren auch stetige und nicht-stetige Funktionen mit endlichem Integral enthalten.

Motivation für die Definition von Lebesgue-Räumen (2)

Problem: Durch $\|\cdot\|_1$ wird auf L^1 nur eine Seminorm erklärt.

Definiert man nun

$$L^1(\Omega) := L^1(\Omega, M^d) := (u \in C^0(\Omega), \int_\Omega |u(x)|dx < \infty)$$

so ist $L^1(\Omega)$ ein linearer Raum und $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf diesem, aber $(L^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$ ist nicht vollständig.

- Sei $\Omega := B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $u_k(x) := \frac{x_1}{\frac{1}{k}+|x|}$ für $x \in \Omega$ und $k \in \mathbb{N}$.
- Jedes u_k ist offenbar stetig in Ω mit $|u_k| \leq 1$ für alle $x \in \Omega$. Ferner gilt $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$.

Definition der Lebesgue-Räume

Sei (X, μ) ein Maßraum und $1 \leq p < \infty$. Dann heißt der durch

$\mathrm{L}^p(X;\mu) := \{u : X \to \overline{\mathbb{R}};\, u\mu - f.\ddot{u}.definiert\ mit \|u\|_p < \infty\}$

$$\text{mit} \qquad ||u||_p := \|u\|_{p;X} := \left(\int_X |u(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \in [0, \infty]$$

erklärte normierte Raum $(L^p(X;\mu), \|\cdot\|_p)$ der LEBESGUE-RAUM der auf X bezüglich dem Maßμ p-summierbaren Funktionen.
Lebesgue-Räume sind vollständig.

Beispiele für Elemente von Lebesgue-Räumen

Sei $X = [-1, 1], p = 1,$
$u_1(x) = x^2 \quad => u_1$ ist stetig auf $\mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$=> \int_{[-1,1]} |u_1(x)|^1\, dx = \int_{[-1,1]} |x^2|\, dx = [\frac{1}{3}x^3]_{-1}^{\;1} < \infty$$

$u_2(x) = \frac{1}{\sqrt[2]{|x|}} => u_2(x)$ ist nicht stetig in 0

$$=> \int_{[-1,1]} |u_2(x)|^1\, dx = \int_{[-1,1]} |\frac{1}{\sqrt[2]{|x|}}|\, dx < \infty$$

$$=> u_1(x), u_2(x) \in L^1([-1, 1])$$

Motivation für die Definition von Schwacher Differenzierbarkeit

Seien $u \in C^1(\Omega), \omega_\gamma \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\gamma \in \{1, ..., d\}$, so dass gilt:

$$\int_\Omega u \partial_\gamma \eta dx = -\int_\Omega \omega_\gamma \eta dx \quad \forall \eta \in C_0{}^\infty(\Omega)$$

Partielle Integration liefert dann

$$\int_\Omega \partial_\gamma u \eta dx = \int_\Omega \omega_\gamma \eta dx \quad \forall \eta \in C_0{}^\infty(\Omega),$$
$$\Rightarrow \omega_\gamma = \partial_\gamma u.$$

Definition der Schwachen Differenzierbarkeit

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $k \in \mathbb{N}_0$, und seien $u, \omega \in {L^1}_{loc}(\Omega)$.

Dann heißt ω die schwache (partielle) Ableitung von u, falls gilt:

$$\int_\Omega u\, \partial_\gamma\, \eta\, dx = (-1) \int_\Omega \omega\, \eta\, dx \quad \forall \eta \in {C_0}^\infty(\Omega)$$

- u ist k-mal schwach diff'bar auf Ω, falls $\forall \gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \leq k\, \exists\, \omega^\gamma \in L^1_{loc}(\Omega)$
- Den Raum aller k-mal auf Ω schwach diff'baren Funktionen $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ bezeichnet man mit $W^k(\Omega)$.
(Insbesondere $W^0(\Omega) := L^1_{loc}(\Omega)$)

Beispiel für eine Schwache partielle Ableitung

Sei $\Omega = [-1, 1]$ und $u(x) = |x|$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \to 0} \frac{|0-h| - |0|}{-h}$$

u ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.
ABER: Die schwache partielle Ableitung $u`(x) = sgn(x)$ existiert mit

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ \text{bel.}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Definition der Sobolev-Räume

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \leq p \leq \infty$ und $k = 1 \in \mathbb{N}_0$.

Dann heißt der lineare Raum

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^1(\Omega); \partial u \in L^p(\Omega) \right\}$$

der SOBOLEV-RAUM mit Differenzierbarkeitsstufe 1 und Integrabilitätsexponent p. Er wird zum Banachraum mit der Norm

$$|||u||_{1,p} := ||u||_{\Omega;1,p} := \left(\sum_{k=1} ||\partial u||^p{}_p \right)^{\frac{1}{p}}; \qquad p < \infty$$

Beispiele für Elemente von Sobolev-Räumen

- Die Elemente von $W^{k,p}(\Omega)$ heißen Sobolev-Funktionen
  - $u(x) = |x| \qquad \in W^{1,1}(\mathbb{R})$
  - $u(x) = \frac{1}{|x-\xi|^s}$ für $x \neq \xi$ und $u(x) = 0$ für $x = \xi$ $\in W^{1,(-s-1)}(\mathbb{R})$
- $I(x) \in W^{k,p}(\Omega) \Rightarrow I(x) \in L^1(\Omega)$
- $W^{k,2}(\Omega)$ sind auch Hilbert-Räume $H^k(\Omega)$. Im Fall $k = 1$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle := \int_\Omega u\, v\, dx + \int_\Omega \partial u \cdot \partial v\, dx.$$