Die Black-Scholes-Gleichung

Franziska Merk

22.06.2012

Outline

Optionen

Eine Kaufoption ist ein Recht, eine Aktie zu einem heute (t=0) festgelegten Preis E an einem zukünftigen Zeitpunkt T zu kaufen.

- S(t) = Preis der Aktie zum Zeitpunkt t
- σ = Volatilität der Aktie
- r = risikoloser Zins
- C(S,T) = Wert der Option zum Zeitpunkt T

$$C(S,T) = \max(S-E,\ 0)$$

Problem: Preis für dieses Recht heute?

Wiener Prozess

Wie verändert sich S in einem kurzen Zeitintervall dt?

Annahmen:

- Vergangenheit spiegelt sich in heutigem Preis S vollständig wieder, ohne Informationen für die Zukunft zu geben
- Märkte reagieren sofort auf neue Informationen bzgl. der Aktie

Wiener Prozess

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX$$

hierbei ist

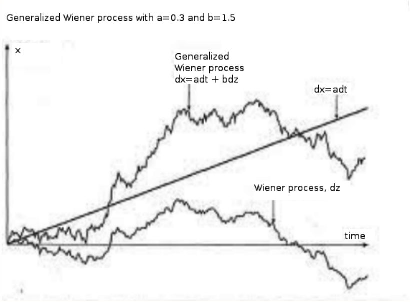
- $\mu =$ durchschnittliche Wachstumsrate des Aktienpreises (hier ist μ konstant)
- $\sigma =$ Volatilität/Standardabweichung
- dX: Wiener Prozess

$\rightarrow$ dX ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz dt

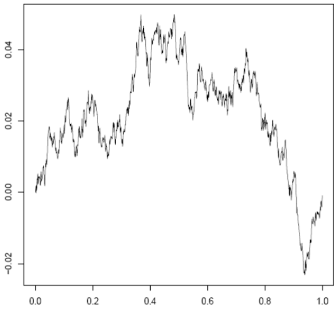
$\rightarrow$ für zwei verschiedene Zeitintervalle dt sind die Werte von dX voneinander unabhängig

Wiener Prozess

$\frac{dS}{S}$ lässt sich Zerlegen in eine konstante Änderung und die durch den Wiener Prozess hervorgerufene zufällige Bewegung.



Dax-Kurs



Simulierter Wiener Prozess

Itô´s Lemma

Für eine glatte Funktion f(S) und eine kleine Veränderung dS von S gilt (mit $dS = \mu S dt + \sigma S dX$):

$$df = \frac{df}{dS}(\sigma S dX + \mu S dt) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} dt$$

$$\Leftrightarrow df = \sigma S \frac{df}{dS} dX + (\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2}) dt \quad \text{(Itő´s Lemma)}$$

Für eine Funktion f(S,t) gilt:

$$df = \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dX + (\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t}) dt$$

Allgemeine Annahmen:

- Aktienpreis folgt Wiener Prozess
- risikoloser Zins r und Volatilität σ sind bekannt und konstant
- keine Transaktionskosten
- keine Dividenden innerhalb der Optionslaufzeit
- keine Arbitrage-Möglichkeiten
- Leerverkäufe sind erlaubt, Aktien sind beliebig teilbar
- Handeln der Aktie uneingeschränkt erlaubt

Sei C(S,t) der Wert einer Option.

Aus Itô´s Lemma folgt dann:

$$dC = \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dX + (\mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial t}) dt$$

Sei π der Wert eines Portfolios bestehend aus einer Option und einer Anzahl Δ zugrundeliegender Aktien.

Es gilt:

$$\pi = C + \Delta S$$

$$\Rightarrow d\pi = dC + \Delta dS$$

Mit $dS = \mu S dt + \sigma S dX$ erhält man:

$$d\pi = \sigma S(\frac{\partial C}{\partial S} + \Delta)dX + (\mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial t} + \mu \Delta S)dt$$

Wähle $\Delta = -\frac{\partial C}{\partial S}$

$$\Rightarrow d\pi = (\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2})dt$$

- risikolose Anlage eines Betrags π zum Zins r ergibt eine Steigerung von π in dt um $r\pi dt$

$$\Rightarrow r\pi dt = (\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2})dt$$

Black-Scholes Differentialgleichung

Zusammen mit $\pi = \mathrm{C} + \Delta\mathrm{S}$ und $\Delta = -\dfrac{\partial C}{\partial S}$ folgt :

Black-Scholes Differentialgleichung

$$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

mit den Randbedingungen

- C(0,t) $= 0$
- C(S,T) $=$ max (S-E,0)
- C(S,t) $\approx$ S für S$\rightarrow \infty$

Lösung

Variablentransformation $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; -\infty < x < \infty, \tau > 0$

mit Lösung: $u(x,\tau) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{\frac{-(x-s)^2}{4\tau}} ds$

erneute Variablentransformation liefert Lösung:

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

- $d_1 = \dfrac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$
- $N(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$

Kritik an Black-Scholes Modell:

- Renditen sind nicht stochastisch unabhängig
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Renditen entspricht keiner Standardnormalverteilung
- Volatilität σ ist nicht konstant

Stochastische Volatilität σ_t

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_t dX_t$$

- $\rightarrow$ σ_t ist zusätzliche stochastische Größe, für die eine zweite stochastische Differentialgleichung angegeben werden kann
- $\rightarrow$ verallgemeinerte Black-Scholes Gleichung
- $\rightarrow$ C ist abhängig von S und σ, dieses kann jedoch nur geschätzt werden
- $\rightarrow$ Lösung der Gleichung ist abhängig von t, S und σ, lässt sich jedoch nicht explizit angeben

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!