Monotone Operatoren

Tobias Kahoun

21.-24.06.2012

Outline

Vorraussetzungen

Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle folgende Bedingungen:

Eigenschaften

- F ist monoton wachsend
- F ist stetig
- F ist koerziv, d.h. $F(u) \to \pm\infty$ falls $u \to \pm\infty$

Dann besitzt die Gleichung

$$F(u) = b$$

für alle $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung $u \in \mathbb{R}$.
Als Resultat dieser Gleichung folgt durch die Theorie monotnoner Operatoren

$$Au = b$$

Monotone Operatoren

Definition: Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum und sei $A : X \to X^*$ ein Operator. Dann heißt A:

Definition: Monotoner Operatore

- **monoton** $\Leftrightarrow \forall u, v \in X$ gilt: $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$.
- **strikt monoton** $\Leftrightarrow \forall u, v \in X, u \neq v$ gilt: $\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$
- **stark monoton**$\Leftrightarrow \exists c > 0$, sodass $\forall u, v \in X$ gilt: $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq c \left\| u - v\right\|^2$
- **koerziv** $\Leftrightarrow \lim_{\|u\|_X \to \infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = \infty$

Stetige Operatoren

Sei x ein reflexiver, reeller Banachraum. Dann heißt $A : X \to X^*$.

Definition: Stetiger Operator

- **demistetig**, wenn aus $u_n \to u$ folgt, dass $Au_n \to Au$ schwach.
- **hemistetig**, wenn $t \mapsto \langle A((1-t)u + tv), w)\rangle$, $\forall t \in [0,1]$ stetig ist.
- **stark stetig**, wenn aus $u_n \to u$ schwach folgt, dass $Au_n \to Au$
- **beschränkt**, wenn A beschränkte Mengen auf beschränkte abbildet

Folgerung

Unmittelbar aus dieser Defintion folgt das Lemma:
Sei X ein redlexiver, reeller Banachraum und $A : X \to X^*$

Lemma

- A stark stetig $\Rightarrow$ A kompakt
- A demistetig $\Rightarrow$ A lokal beschränkt
- A monoton $\Rightarrow$ A lokal beschränkt
- A monoton und hemistetig $\Rightarrow$ A demistetig

Minty-Trick

Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A : X \to X^*$ ein hemistetiger, monotoner Operator. Dann gilt:

Eigenschaften

- Operator A maximal monoton, d.h. $u \in X, b \in X^*$, sodass $\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0 \forall v \in X$

$$\Rightarrow Au = b$$

- Für A ist ausreichend, dass $u_n \rightharpoonup u$ in X, $Au_n \rightharpoonup b$ in X^* und $\langle Au_n, u_n\rangle \to \langle b, u\rangle\, x\, (n \to \infty)$

$$\Rightarrow Au = b$$

- Aus $u_n \rightharpoonup u$ in X und $Au_n \rightharpoonup b$ in X^* $(n \to \infty)$

$$\Rightarrow Au = b$$

Lemma (Konvergenzprinzipien)

Sei X ein Banachraum. Dann gilt:

Eigenschaften

- Wenn $x_n \rightharpoonup x$ schwach in X, $(n \to \infty)$, dann existiert eine Konstante c, so dass $\|x_n\| \leq c$.
- Wenn $x_n \rightharpoonup x$ schwach in X, $(n \to \infty)$, $f_n \to f$ in $X^*(n \to \infty)$

$$\Rightarrow \langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \, (n \to \infty)$$

- Sei X zusätzlich reflexiv. Die Folge (x_n) sei beschränkt. Wenn allel konvergenten Teilfolgen von (x_n) schwach gegen denselben Grenzwert x konvergieren, dann konvergiert die gesamte Folge (x_n) schwach gegen x.

Der Satz von Browder und Minty

Satz

- Sei X ein separabler, reflexiver, reeler Banachraum mit einer Basis $(w_i)_{i \in N}$. Ferner sei $A : X \to X^*$ ein monotoner, koerziver, hemistetiger Operator. Dann existiert für alle $b \in X^*$ eine Lösung $u \in X$ von
$$Au = b$$

Idee

Sei $w_n \subseteq X$ eine abzählbare linear unabhängige Menge in X.

- Definiere: $X_n := span\,\{w_1, ..., w_n\}$ und suche eine approximative Lösung der Form
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^n w_k \in X_n$$
die $\langle Au_n - b, w_k \rangle = 0 \ \forall k = 1, ..., n$ lösen.

Beweis: Schritt 1

Zeige, dass $\langle Au_n - b, w_k \rangle = 0 \ \forall k = 1, ..., n$ stets eine Lösung hat.

- Betrachte Abbildung

$$g_k\left(c^n\right) := \langle Au_n - b, w_k \rangle$$

  und löse auf nach

$$g\left(c^n\right) = 0$$

- Da A demistetig und g stetig, sieht man dass g eine Nullstelle und dass es eine von n unabhängige Konstante R_0 mit $\|u_n\| \leq R_0$ gibt.

Beweis: Schritt 2

Zeige (Au_n) ist beschränkt

- Aus Monotonie folgt, dass A lokal Beschränkt ist:

$$\exists r, \delta > 0, \text{ sodass } \forall \|v \leq\| r \text{ gilt, dass } \|Av\| \leq \delta \text{ ist.}$$

Wegen $\langle Au_n, u_n \rangle = \langle b, u_n \rangle$ und der Beschränktheit der u_n gilt:

$$|\langle Au_n, u_n \rangle| \leq \|b\| \|u_n\| \leq \|b\| R_0$$

Beweis: Schritt 3

Zeige nun, dass u_n gegen eine Lösung konvergiert.

- Da u_n beschränkt, X reflexiv existiert eine Teilfolge $u_n \rightharpoonup u$ in X.
  Es gilt:

$$\text{c=b}$$
$$\langle Au_n, w \rangle = \langle b, w \rangle$$
$$\text{also } \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, w \rangle = \langle b, w \rangle \, \forall w \in \bigcup_{k\in N} X_k$$

- Da auch Au_n beschränkt und $X*$ reflexiv folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle b, u_n \rangle = \langle b, u \rangle$$
$$\Rightarrow Au = b$$

Beweis: Schritt 4

Zeige Eigenschaften der Lösungsmenge $S := \{u \in X : Au = b\}$

- Aus Koerzivität von A folg Beschränktheit von A
- Durch direkte Rechnung erhält man Konvexität von A und aus Monotonie folgt Abgeschlossenheit

Ingesamt sieht man falls A strikt monoton ist, gilt für zwei Lösungen u und v, dass

$$0 < \langle Au - av, u - v \rangle = \langle b - b, u - v \rangle = 0$$

Widerspruch!

Beweis: 1.Schritt

Beweis mit Hilfe des Galerkin Verfahrens:

Galerkin-Approximation

- Sei $X_n = span\left\{w_1, ..., w_n\right\}$
  $u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^n w_k$ ist Galerkin-Lösung falls $\langle Au_n - f, w_k \rangle$ für k=1,...,n
  $\rightarrow \langle (\sum_{k=1}^{n} c_k^n w_k) - b, w_k \rangle$ für k=1,...,n
- nichtlinerares Gleichungssystem zur Bestimmtung eines Verktors $\vec{c}^n = (c_1^n, ..., c_n^n)$
  Setze $g_k\left(\vec{c}^n\right) = \langle A\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^n w_k\right) - b, w_k \rangle$
  $\Rightarrow \vec{g}\left(\vec{c}^n\right) = \vec{0}$

Beweis: 2.Schritt

Lösung der Gleichung $\langle Au_n - b, w_k \rangle = 0$, k=1, ..., n.
Nichlineares System von Gleichungen bezüglich der Vektoren $c^n := (c_1^n, ..., c_n^n) \in \mathbb{R}^n$.
Mit Hilfe der Abbildung $g := (g_1, ..., g_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : c^n \mapsto g_k(c^n) := \langle Au_n - b, w_k \rangle, \text{ k=1, ..., n}$$

umschreiben in

$$g(c^n) = 0$$