Wellengleichung im dreidimensionalen Raum

Andrea Janicher

25.06.2012

Outline

Anfangswertproblem

Anfangswertproblem

$$c^2 \Delta u(x,t) = u_{tt}(x,t); \quad u(0,x) = f(x); \quad u_t(0,x) = g(x)$$
$$x \in \mathbb{R}^3, t > 0$$

Mit dem Laplaceoperator:

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3} \qquad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},$$

Da wir die Differentialgleichung u_{tt} zweiten Grades betrachten, benötigen wir die zwei Anfangswertbedingungen f,g.

Eindimensionale Wellengleichung (1)

Gesucht ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion u(x,t), die der eindimensionalen Wellengleichung genügt.

Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \\ u_t(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Durch Nachrechnen erhält man folgende Lösung:

- u(x,t)=v(x-ct)+w(x+ct) v,w aus $C^2(R)$,

Eindimensionale Wellengleichung (2)

- $u(x,0) = v(x - c*0) + w(x + c*0) = v(x) + w(x) = f(x)$
- $u_t(x,0) = -cv'(x - c*0) + cw'(x + c*0) = -cv'(x) + cw'(x) = g(x)$

$\Rightarrow \quad v' = \frac{1}{2}(f'(x) - \frac{1}{c}g(x)), w' = \frac{1}{2}(f'(x) + \frac{1}{c}g(x))$

- Integration:

$$v(x) = v(0) + \frac{1}{2}(f(x) - f(0)) - \frac{1}{2c}\int_{[0,x]} xg(s), ds$$

$$w(x) = w(0) + \frac{1}{2}(f(x) - f(0)) + \frac{1}{2c}\int_{[0,x]} g(s), ds$$

- Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{2c}\int_{[x-ct,x+ct]} g(s), ds$$

Eindimensionale Wellengleichung (3)

Deutung:

- v(x-ct): Bewegung des Wellenprofils v(x) (t=0!) mit Geschwindigkeit c nach rechts
- w(x+ct): Bewegung des Wellenprofils w(x) (t=0!) mit Geschwindigkeit c nach links

Somit zerfällt die Welle mit Startprofil f(x) in zwei Wellen mit Profil $\frac{1}{2}$ f(x), die sich mit der Geschwindigkeit c nach rechts und links ausbreitet.

Radialsymmetrische Lösung der 3-dimensionalen Wellengleichung (1)

- Eine radialsymmetrische Lösung hängt nur vom Abstand $r = |x|$ des Punktes x zum Ursprung ab.
- Annahme: Die Anfangswertprobleme f, g hängen nur von r ab.
- Folgerung: Die die Lösung u hängt ebenfalls nur von r ab.

Anfangswertbedingungen

$$u_{tt} = c^2(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r); \quad u(0,r) = f(r); \quad u_t(0,r) = g(r)$$

$$r = |x|, x \in \mathbb{R}^3, t > 0$$

Radialsymmetrische Lösung der 3-dimensionalen Wellengleichung (2)

Aus der Multiplikation mit r folgt die Lösung

$$U(t,r) = \frac{1}{2}(F'(r+ct) + F'(r-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{[x-ct,x+ct]} G'(s), ds$$

Wobei F', G' Fortsetzungen von F(r)=rf(r) und G(r)=rg(r) für alle $r \in \mathbb{R}$ durch Siegelung im Ursprung sind.

Methode des sphärischen Mittels (1)

- Annahme: Die Anfangswertprobleme f, g hängen sowohl von r als auch von der Richtung des Vektors x ab.
- Mittlung der Gleichungen um Unabhängigkeit von der Richtung des Vektors x zu erhalten.

Sphärischen Mittel

$$\begin{cases} f'(x,r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x)} f(y)dS(y) \\ g'(x,r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x)} g(y)dS(y) \\ u'(x,r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x)} u(x,t)dS(y) \end{cases}$$

Methode des sphärischen Mittels (2)

Zu zeigen ist zunächst folgendes Lemma:
Sei u(x,t) eine Lösung des Anfangswertproblems. Für jedes feste $x \in \mathbb{R}^3$ genügen die sphärischen Mittel u',f',g' den

Euler-Boisson-Darboux-Gleichungen

$$u'_{tt} = c^2(u'_{rr} + \frac{2}{r}u'_r)$$

$$u'(x,r,0) = f'(x,r)$$

$$u'_t(x,r,0) = g'(x,r)$$

Methode des sphärischen Mittels (3)

Die Kirchhoffsche Formel

Jede Lösung u(x,t) ist gegeben durch die Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x)} g(y) dS(y) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x)} f(y) dS(y)$$

Beweisidee:

$$u(x,t) = lim_{r->0} u'(x,r,t)$$

Bemerkung: Damit ist sowohl die Eindeutigkeit als auch die Existenz der Lösung gegeben.

Huygenssches Prinzip

Folgerung aus der Kirchhoffschen Formel:

Abhängigkeitsbereich von (x_0, t_0):

$$[(x,t) : |x - x_0| = c(t_0 - t), t < t_0]$$

Einflussbereich von (x_0, t_0):

$$[(x,t) : |x - x_0| = c(t_0 - t), t > t_0]$$