

Skript zu der Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen 1

WS08/09 bei Prof. Dr. Mark Groves

23. März 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Trennung der Variablen	15
3	Die Wellengleichung	39
3.1	Die Wellengleichung im eindimensionalen Raum	39
3.2	Die Wellengleichung im eindimensionalen Halbraum	44
3.3	Die Wellengleichung im dreidimensionalen Raum	46
3.4	Die Wellengleichung im zweidimensionalen Raum	53
4	Die Wärmeleitungsgleichung	57
4.1	Das Maximumsprinzip	57
4.2	Die Wärmeleitungsgleichung im n -dimensionalen Raum	62
5	Distributionen, Fundamentallösungen und Greensche Funktionen	72
5.1	Eindimensionale Distributionen	72
5.2	Distributionen in höheren Dimensionen	81
5.3	Fundamentallösungen	85
5.4	Greensche Funktionen	91
6	Harmonische Funktionen und die Perronsche Methode	96
6.1	Die Poissonsche Formel	96
6.2	Sub-, super- und harmonische Funktionen	102
6.3	Das starke Maximumsprinzip	106
6.4	Konvergenzsätze für Folgen harmonischer Funktionen	111
6.5	Die Perronsche Methode	117

1 Einleitung

Definition

1. Eine **partielle Differentialgleichung** der **Ordnung** m mit $n \geq 2$ **unabhängigen Veränderlichen** $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und einer **abhängigen Veränderlichen** $u = u(\mathbf{x})$ ist eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned} F(u(\mathbf{x}), \partial_{x_1} u(\mathbf{x}), \dots, \partial_{x_n} u(\mathbf{x}), \\ \partial_{x_1}^2 u(\mathbf{x}), \partial_{x_1} \partial_{x_2} u(\mathbf{x}), \dots, \partial_{x_n}^2 u(\mathbf{x}), \\ \dots, \\ \partial_{x_1}^m u(\mathbf{x}), \dots, \partial_{x_n}^m u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

wobei F eine beliebige Funktion ist.

2. Eine **Lösung** der partielle Differentialgleichung (1) in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (d. h. in einer offenen, nichtleeren, zusammenhängenden Teilmenge von \mathbb{R}^n) ist eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass u die Gleichung für jedes $\mathbf{x} \in \Omega$ erfüllt.

Lineare Gleichungen

Die partielle Differentialgleichung (1) heißt **linear** in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, falls $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ Lösung der Gleichung

$$F(\dots, \mathbf{0}) = 0$$

für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und alle Lösungen u_1, u_2 der Gleichung in Ω ist.

Die partielle Differentialgleichung (1) heißt **linear homogen**, falls sie homogen ist und

$$F(\dots, \mathbf{0}) = 0.$$

Beispiele

1. Die Laplace-Gleichung

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} = 0 \quad (\text{linear homogen, zweite Ordnung})$$

2. Die Poisson-Gleichung

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \dots + u_{x_nx_n} = f(x), \quad (\text{linear, zweite Ordnung})$$

wobei f eine beliebige Funktion ist

3. Die Klein-Gordon-Gleichung

$$u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - \dots - u_{x_nx_n} + u - u^3 \quad (\text{nichtlinear, zweite Ordnung})$$

4. Die Erhaltungsgleichung

$$u_{x_1} - uu_{x_2} = 0 \quad (\text{nichtlinear, erste Ordnung})$$

5. Die Eikonalgleichung

$$u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = c^2, \quad (\text{nichtlinear, erste Ordnung})$$

wobei $c \neq 0$ eine beliebige Konstante ist

In dieser Vorlesung werden überwiegend lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt.

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen

Die einfachste Gleichung dieser Art ist

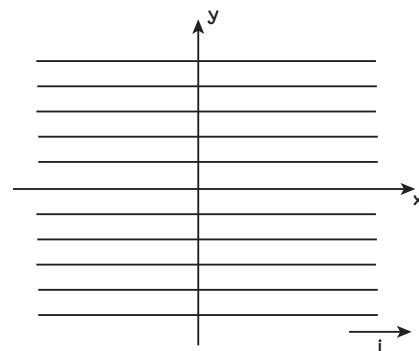
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \longleftarrow \text{“}u \text{ ist konstant in der } x\text{-Richtung”}$$

wobei $u = u(x,y)$ ist. Die allgemeine Lösung ist

$$u = f(y),$$

wobei f eine beliebige Funktion einer Veränderlichen ist.

- u ist konstant entlang der Geraden $y = \text{Konstante}$, die parallel zur i -Richtung laufen.
- u hängt daher nur von y ab.



Dieselbe Methode funktioniert auch für kompliziertere Gleichungen.

Beispiel

Finden Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$au_x + bu_y = 0 \quad (2)$$

für $u = u(x,y)$, wobei a, b Konstante mit $a^2 + b^2 \neq 0$ sind.

Lösung

(2) lässt sich umschreiben als

$$\underbrace{\frac{(a,b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\text{Einheitsvektor}} \cdot \nabla u = 0$$

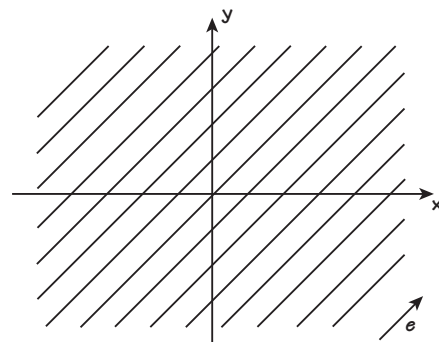
die Richtungsableitung $\frac{\partial u}{\partial e}$

von u in Richtung des

Einheitsvektors $\mathbf{e} = \frac{(a,b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(2) besagt also, dass u in der \mathbf{e} -Richtung konstant ist.

- u ist konstant entlang der Geraden $bx - ay = \text{Konstante}$, die parallel zur \mathbf{e} -Richtung laufen.
- u hängt daher nur von $bx - ay$ ab.



Die allgemeine Lösung von (2) ist also

$$u = f(bx - ay),$$

wobei f eine beliebige Funktion einer Veränderlichen ist. □

Definition

Die Geraden

$$bx - ay = \text{Konstante}$$

heißen die **charakteristischen Linien** der Gleichung

$$au_x + bu_y = 0.$$

Beispiel

Finden Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$u_x + yu_y = 0 \tag{3}$$

für $u = u(x, y)$.

Lösung

(3) besagt, dass die Richtungsableitung von u in Richtung des Einheitsvektors

$$\mathbf{e} = \frac{(1, y)}{\sqrt{1 + y^2}}$$

verschwindet. u ist also konstant entlang der **charakteristischen Kurven** mit Tangentenvektor \mathbf{e} .

Der Tangentenvektor zur Kurve $\{y = y(x)\}$ ist nun

$$\frac{(1, y'(x))}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}},$$

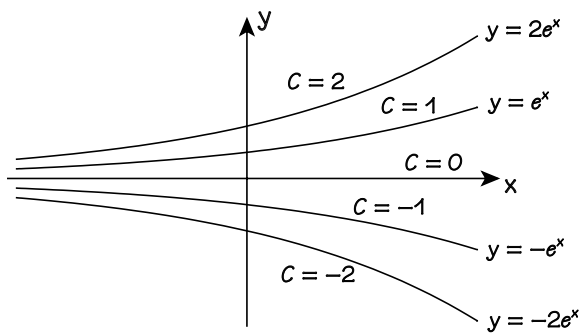
so dass die charakteristischen Kurven als Lösungen der trennbaren gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y$$

gefunden werden können. Sie sind also

$$y = Ce^x,$$

wobei C eine Konstante ist.



Die charakteristischen Kurven stellen eine **Blätterung** des \mathbb{R}^2 dar.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}u(x, Ce^x) &= 0 \\ \Rightarrow u(x, Ce^x) &= u(0, C) \\ \Rightarrow u(x, y) &= u(0, e^{-x}y) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$u(x, y) = f(e^{-x}y),$$

wobei f eine beliebige Funktion einer Veränderlichen ist.

Bemerkung

Betrachte die Gleichung

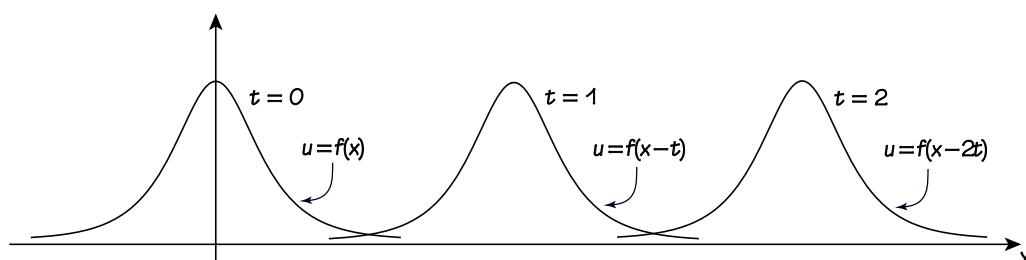
$$u_t + cu_x = 0$$

für $u = u(x, t)$, wobei c eine positive Konstante ist. Die allgemeine Lösung ist

$$u = f(x - ct),$$

wobei f eine beliebige Funktion einer Veränderlichen ist.

Wenn wir x als 'Raum' und t als 'Zeit' betrachten, besteht die Lösung aus einer Welle, die sich von links nach rechts mit Geschwindigkeit c und ohne Formänderung bewegt:



Anfangswerte

Die allgemeinen Lösungen der Gleichungen

$$au_t + bu_x = 0$$

und

$$u_t + xu_x = 0$$

sind

$$u = f_1(bt - ax)$$

bzw.

$$u = f_2(e^{-t}x),$$

wobei f_1, f_2 beliebige Funktionen einer Veränderlichen sind. Wenn wir den Wert von u als Funktion von x zu einem bestimmten 'Zeitpunkt' $t = t_0$ vorschreiben, können wir u eindeutig bestimmen.

Beispiel

Lösen Sie die **Anfangswertprobleme**

1. $au_t + bu_x = 0, \quad u(0, x) = \sin x;$
2. $u_t + xu_x = 0, \quad u(0, x) = x^3.$

Lösung

1. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$u(t, x) = f_1(bt - ax)$$

und aus

$$u(0, x) = \sin x$$

folgt

$$\begin{aligned} f_1(-ax) &= \sin x \\ \Rightarrow f_1(x) &= \sin\left(\frac{-x}{a}\right). \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$u(t, x) = \sin\left(x - \frac{b}{a}t\right).$$

2. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$u(t,x) = f_2(e^{-t}x)$$

und aus

$$u(0,x) = x^3$$

folgt

$$f_2(x) = x^3.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$u(t,x) = x^3 e^{-3t}.$$

□

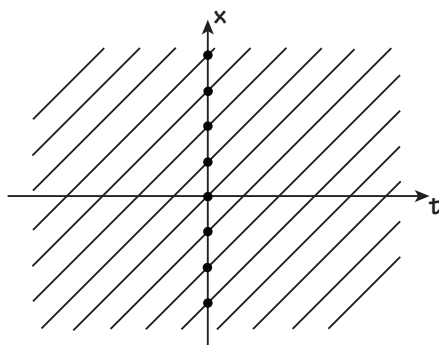
Bemerkung

Eine Lösung der Gleichung

$$au_t + bu_x = 0$$

ist konstant entlang der charakteristischen Kurven

$$bt - ax = c.$$

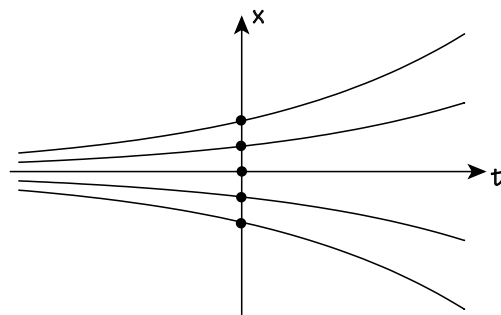


Eine Lösung der Gleichung

$$u_t + xu_x = 0$$

ist konstant entlang der charakteristischen Kurven

$$y = ce^t.$$



In beiden Fällen bilden die charakteristischen Kurven eine Blätterung der (t,x) -Ebene. Insbesondere schneidet jede charakteristische Kurve die x -Achse genau einmal. Durch die Angabe eines Anfangswertes legen wir also die konstanten Werte von u entlang der charakteristischen Kurven fest.

Falls nicht alle charakteristischen Kurven die x -Achse schneiden, können wir durch die Angabe eines Anfangswertes u nicht überall eindeutig bestimmen.

Beispiel

Finden Sie die charakteristischen Kurven der Gleichung

$$u_t - x^2 u_x = 0$$

und diskutieren Sie das entsprechende Anfangswertproblem.

Lösung

Die charakteristischen Kurven der Gleichung

$$u_t - x^2 u_x = 0$$

sind die Lösungen $x = x(t)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

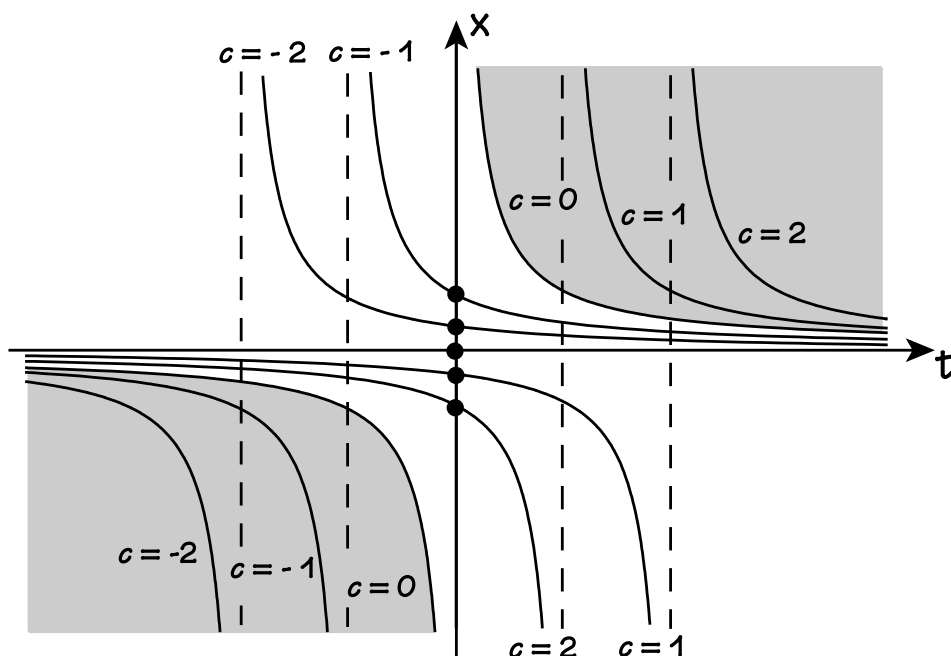
$$\frac{dx}{dt} = -x^2,$$

also

$$x = 0$$

und

$$x = \frac{1}{t - c}, \quad c \in \mathbb{R}:$$



Die charakteristischen Kurven in den markierten Regionen $x \geq 1/t > 0$ und $x \leq 1/t < 0$ schneiden die x -Achse nicht.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die allgemeinste homogene Gleichung dieser Art in n unabhängigen Veränderlichen x_1, \dots, x_n ist

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + a_0 u = 0, \quad (1)$$

wobei a_{ij} , a_i und a_0 Konstante sind und die Matrix $A = (a_{ij})_{n \times n}$ symmetrisch und nicht gleich Null ist.

Lemma

Es existieren eine lineare Koordinatentransformation $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x})$ und nichtnegative ganze Zahlen m_1, m_2 mit $m_1 + m_2 \leq n$, so dass (1) die Form

$$\sum_{k=1}^{m_1} u_{z_k z_k} - \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} u_{z_k z_k} + \sum_{k=1}^n c_k u_{z_k} + c_0 u = 0 \quad (2)$$

in den neuen Koordinaten hat.

Beweis

Da A reell und symmetrisch ist, sind ihre Eigenwerte alle reell. Ferner existiert eine orthogonale Matrix Q mit der Eigenschaft, dass

$$B := Q A Q^T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1}, \lambda_{m_1+1}, \dots, \lambda_{m_1+m_2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n - (m_1 + m_2)\text{-mal}}),$$

wobei m_1 und m_2 die Anzahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte (nach geometrischer Vielfachheit gezählt) sind.

Betrachte die Koordinatentransformation $\mathbf{y} = Q\mathbf{x}$, d.h.

$$y_k = \sum_{m=1}^n q_{km} x_m, \quad k = 1, \dots, n.$$

Aus der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} \\ &= \sum_{k=1}^n q_{ki} \frac{\partial}{\partial y_k}, \end{aligned}$$

so dass

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n q_{ki} u_{y_k},$$

$$u_{x_i x_j} = \left(\sum_{k=1}^n q_{ki} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \left(\sum_{\ell=1}^n q_{\ell j} \frac{\partial}{\partial y_\ell} \right) u$$

und

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} = \sum_{k,\ell=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^n q_{ki} a_{ij} q_{\ell j} \right)}_{= b_{k\ell}} u_{y_k y_\ell},$$

$$\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n q_{ki} a_i \right)}_{:= b_k} u_{y_k}.$$

Unsere Gleichung ist somit

$$\sum_{k=1}^{m_1} \lambda_k u_{y_k y_k} + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \lambda_k u_{y_k y_k} + \sum_{k=1}^n b_k u_{y_k} + a_0 u = 0. \quad (3)$$

Schließlich definieren wir

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}} y_k, \quad k = 1, \dots, m_1 + m_2$$

und

$$z_k = y_k, \quad k = m_1 + m_2 + 1, \dots, n.$$

Damit wird Gleichung (3) in Gleichung (2) transformiert, wobei $c_k = b_k / \sqrt{|\lambda_k|}$, $k = 1, \dots, n$ und $c_0 = a_0$. \square

Definition

Die Gleichung (1) heißt

- **elliptisch**, falls $m_1 = n$ oder $m_2 = n$ ist (alle Eigenwerte von A haben dasselbe Vorzeichen);

- **parabolisch**, falls $m_1 + m_2 < n$ ist (mindestens ein Eigenwert von A verschwindet);
- **hyperbolisch**, falls $m_1 + m_2 = n$ und $m_1 = 1$ oder $m_2 = 1$ (kein Eigenwert von A verschwindet, und bis auf einen haben alle Eigenwerte dasselbe Vorzeichen).

Beispiele

1. Die Laplace-Gleichung

$$u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_nx_n} = 0$$

für $u = u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ist elliptisch.

2. Die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_nx_n}$$

für $u = u(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ist parabolisch.

3. Die Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2(u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_nx_n})$$

für $u = u(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, wobei c eine positive Konstante ist, ist hyperbolisch.

Die Gleichungen

$$\Delta u = 0$$

$$u_t = \Delta u$$

$$u_{tt} = \Delta u$$

(Laplace-Gleichung)

(Wärmeleitungsgleichung)

(Wellengleichung)

sind die kanonischen Beispiele der drei Arten von Gleichungen und wir werden sie gründlich untersuchen. Hier schreiben wir

$$\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2.$$

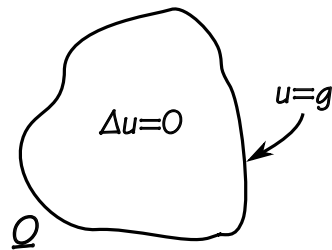
↑

der **Laplace-Operator**

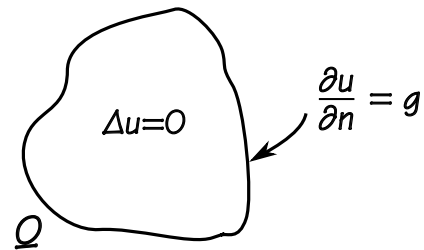
Wir untersuchen unsere Gleichungen für Werte von \mathbf{x} in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dabei gilt die partielle Differentialgleichung nur **im Inneren** von Ω ; wir müssen zusätzlich vorschreiben, wie sich u auf dem Rande $\partial\Omega$ von Ω verhält. Dies tun wir, indem wir entweder den Wert von u (**Dirichlet Randwerte**) oder den Wert der normalen Ableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ (**Neumannsche Randwerte**) auf $\partial\Omega$ vorschreiben.

Im Falle der Laplace-Gleichung führt diese Prozedur zu zwei **Randwertproblemen**:

- Das **Dirichletsche Randwertproblem**



- Das **Neumannsche Randwertproblem**



Die Wellen- und Wärmeleitungsgleichungen haben eine gesonderte unabhängige Veränderliche t , die wir üblicherweise als 'Zeit' betrachten. Wir schreiben die Lösung als

$$u(t, \mathbf{x}),$$

\swarrow \nwarrow
 'Zeit' 'Raum'

wobei die partielle Differentialgleichung die **Evolution** in Zeit von u im räumlichen Gebiet Ω beschreibt. Wir schreiben Dirichletsche oder Neumannsche Randwerte auf $\partial\Omega$ sowie **Anfangswerte** bei $t = 0$ vor:

Wärmeleitungsgleichung

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \Delta u, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ u &= g, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g, \end{aligned} \right\} \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0,$$

$$u = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, t = 0$$

Wellengleichung

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ u &= g, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g, \end{aligned} \right\} \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0,$$

$$\begin{aligned} u &= f_1, & \mathbf{x} \in \Omega, t = 0, \\ u_t &= f_2, & \mathbf{x} \in \Omega, t = 0 \end{aligned}$$

Dies sind **Anfangsrandwertprobleme**.

Wir werden uns mit folgenden Themen beschäftigen:

- **Existenz:** Haben die obigen Probleme Lösungen? Welche Methode gibt es, um die Lösungen zu finden?
- **Eindeutigkeit:** Gibt es nur eine Lösung?
- Die **qualitativen Eigenschaften** der Lösungen.

2 Trennung der Variablen

Beispiel

Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0,a), t > 0, \quad (1)$$

$$u(t,0) = 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(t,a) = 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u(0,x) = f(x). \quad (4)$$

Lösung

Wir suchen eine Lösung der Form

$$u(t,x) = f_1(t)f_2(x), \quad \text{‘Separationsansatz’}$$

so dass

$$\begin{aligned} f_1'(t)f_2(x) &= f_1(t)f_2''(x) \\ \Rightarrow \frac{f_1'(t)}{f_1(t)} &= \frac{f_2''(x)}{f_2(x)}. \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von t ab, während die rechte Seite nur von x abhängt. Beide Seiten sind also konstant:

$$\frac{f_1'(t)}{f_1(t)} = k, \quad \frac{f_2''(x)}{f_2(x)} = k$$

Die Funktion f_2 genügt also den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_2''(x) - kf_2(x) &= 0, \quad x \in (0,a), \\ f(0) &= 0, \\ f(a) &= 0. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

$$\underline{k = 0}$$

Es gilt:

$$f_2(x) = Ax + B,$$

und

$$\left. \begin{array}{l} f_2(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ f_2(a) = 0 \Rightarrow Aa + B = 0 \end{array} \right\} A = B = 0,$$

so dass $f_2(x) = 0$ ist.

$$\underline{k = \kappa^2 > 0}$$

Es gilt:

$$f_2(x) = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$$

und

$$\left. \begin{array}{l} f_2(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \\ f_2(a) = 0 \Rightarrow Ae^{\kappa a} + Be^{-\kappa a} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = B = 0,$$

so dass $f_2(x) = 0$ ist.

$$\underline{k = -\kappa^2 > 0}$$

Es gilt:

$$f_2(x) = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x$$

und

$$\begin{aligned} f_2(0) = 0 &\Rightarrow A = 0 \\ f_2(a) = 0 &\Rightarrow B \sin \kappa a = 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten eine nichttriviale Lösung für f_2 durch die Wahl

$$\kappa = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

so dass

$$f_2(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ist.

Die entsprechende Gleichung für f_1 ist

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= -\frac{n^2 \pi^2}{a^2} f_1(t) \\ \Rightarrow f_1(t) &= C_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}\right), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Die trennbaren Lösungen von (1)-(3) sind also

$$u_n(t,x) = D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{a^2}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Es bleibt nun, die Anfangsbedingung (4) zu diskutieren. Da die Gleichung (1) linear ist, ist jede lineare Kombination der Lösungen u_n , $n = 1, 2, \dots$ ebenfalls eine Lösung. Als allgemeine Lösung nehmen wir also die 'unendliche Summe'

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{a^2}\right).$$

Aus

$$u(0,x) = f(x)$$

folgt

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}_{\text{Dies ist die Sinusreihendarstellung von } f}$$

Dies ist die
Sinusreihendarstellung von f

so dass

$$D_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \quad \square$$

Dieselbe Methode funktioniert für Probleme in höheren Dimensionen.

Beispiel

Lösen Sie das Randwertproblem

$$\Delta u = 0, \quad r < a, \quad (1)$$

$$u(a,\theta) = f(\theta), \quad (2)$$

wobei (r,θ) die üblichen ebenen Polarkoordinaten sind.

Lösung

Wir brauchen die Formel

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

für den Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten.

Wir suchen eine Lösung von (1), (2) der Form

$$u(r,\theta) = f_1(r)f_2(\theta), \quad \text{'Separationsansatz'}$$

so dass

$$\begin{aligned} f_2(\theta)f_1''(r) + \frac{1}{r}f_2(\theta)f_1'(r) + \frac{1}{r^2}f_2''(\theta)f_1(r) &= 0 \\ \Rightarrow r^2\frac{f_1''(r)}{f_1(r)} + r\frac{f_1'(r)}{f_1(r)} &= -\frac{f_2''(\theta)}{f_2(\theta)} \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von r ab, während die rechte Seite nur von t abhängt. Beide Seiten sind also konstant:

$$r^2\frac{f_1''(r)}{f_1(r)} + \frac{rf_1'(r)}{f_1(r)} = k, \quad -\frac{f_2''(\theta)}{f_2(\theta)} = k.$$

Die Funktion f_2 genügt also den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_2''(\theta) + kf_2(\theta) &= 0, \\ f_2(\theta + 2\pi) &= f_2(\theta). \end{aligned}$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

$$\underline{k = 0}$$

Es gilt:

$$f_2(\theta) = A\theta + B$$

und

$$\begin{aligned} f_2(\theta + 2\pi) &= f_2(\theta) \\ \Rightarrow A &= 0, \end{aligned}$$

so dass $f_2(\theta) = B$ ist.

$$\underline{k = -\kappa^2 < 0}$$

Es gilt:

$$f_2(\theta) = Ce^{\kappa\theta} + De^{-\kappa\theta}$$

und

$$\begin{aligned} f_2(\theta + 2\pi) &= f_2(\theta) \\ \Rightarrow C &= D = 0, \end{aligned}$$

so dass $f_2(x) = 0$ ist.

$$k = \kappa^2 > 0$$

Es gilt:

$$f_2(\theta) = E \sin(\kappa\theta) + F \cos(\kappa\theta)$$

und wir erhalten eine nichttriviale 2π -periodische Lösung für

$$\kappa = n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

so dass

$$f_2(\theta) = E_n \sin(n\theta) + F_n \cos(n\theta), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die entsprechende Gleichung für f_1 ist die **Euler-Gleichung**

$$r^2 f_1''(r) + r f_1'(r) - n^2 f_1(r) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

($n = 0$ entspricht dem Fall $k = 0$ und $f_2(\theta) = B$.) Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$f_1(r) = \begin{cases} A_0 + B_0 \log r, & n = 0, \\ A_n r^n + B_n r^{-n}, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Unsere Lösungen müssen zweimal differenzierbar für $r < a$ und insbesondere stetig im Nullpunkt sein. Wir setzen daher $B_0 = 0$ und $B_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Die trennbaren Lösungen von (1) sind also

$$\begin{aligned} u_0(r, \theta) &= C_0, \\ u_n(r, \theta) &= r^n (C_n \sin(n\theta) + D_n \cos(n\theta)), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Um die Randbedingung (2) zu erfüllen, benutzen wir die unendliche Summe

$$u(r, \theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (C_n \sin(n\theta) + D_n \cos(n\theta))$$

als allgemeine Lösung von (1). Aus (2) folgt

$$C_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (C_n a^n \sin(n\theta) + D_n a^n \cos(n\theta))}_{\text{Fourierreihendarstellung von } f} = f(\theta),$$

so dass

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$

$$C_n a^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$D_n a^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

□

Manchmal entstehen Gleichungen mit durch spezielle Funktionen definierten Lösungen.

Beispiel

Finden Sie alle trennbaren Lösungen der $(2 + 1)$ -dimensionalen Wellengleichung

$$u_{tt} = \Delta u, \quad r < a, t > 0 \quad (1)$$

mit Randbedingung

$$u = 0, \quad r = a, t > 0, \quad (2)$$

wobei (r, θ) die üblichen ebenen Polarkoordinaten sind.

Lösung

Wir suchen eine Lösung von (1), (2) der Form

$$u(r, \theta, t) = F(r, \theta) f_3(t), \quad \text{‘Separationsansatz’}$$

so dass

$$\frac{\Delta F(r, \theta)}{F(r, \theta)} = \frac{f_3''(t)}{f_3(t)} = k_1$$

ist. Die Funktion F genügt also den Gleichungen

$$\Delta F = k_1 F, \quad r < a, \quad (3)$$

$$F = 0, \quad r = a. \quad (4)$$

Wir unterscheiden drei Fälle.

$$\underline{k_1 = 0}$$

Aus dem ersten Greenschen Integralsatz folgt

$$\begin{aligned} \int_{r < a} (F \Delta F + \nabla F \cdot \nabla F) &= \int_{r=a} F \frac{\partial F}{\partial n} \\ \Rightarrow \int_{r < a} |\nabla F|^2 &= 0 \\ \Rightarrow |\nabla F|^2 &= 0 \\ \Rightarrow F &= \underbrace{\text{Konstante}} \\ &= 0 \\ &\text{weil } F = 0 \text{ f\u00fcr } r = a \end{aligned}$$

$$\underline{k_2 = \kappa^2 > 0}$$

Diesmal erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{r < a} (\kappa^2 F^2 + |\nabla F|^2) &= 0 \\ \Rightarrow \int_{r < a} F^2 &= 0 \\ \Rightarrow F &= 0 \end{aligned}$$

$$\underline{k_1 = -\kappa^2 < 0}$$

Wir suchen eine L\u00f6sung von (3), (4) der Form

$$u(r, \theta) = f_1(r) f_2(\theta), \quad \text{'Separationsansatz'}$$

so dass

$$\frac{r^2 f_1''(r)}{f_1(r)} + \frac{r f_1'(r)}{f_1(r)} + \kappa^2 r^2 = \frac{-f_2''(\theta)}{f_2(\theta)} = k_2$$

ist. Die Funktion f_2 gen\u00fcgt also den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_2''(\theta) + k_2 f_2(\theta) &= 0, \\ f_2(\theta + 2\pi) &= f_2(\theta). \end{aligned}$$

Wie im letzten Beispiel folgern wir, dass $k_2 = n^2$, $n = 0, 1, \dots$ ist und

$$f_2(\theta) = \begin{cases} A_0, & n = 0, \\ A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta), & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Die entsprechenden Gleichungen für f_1 sind

$$r^2 f_1''(r) + r f_1' + (\kappa^2 r^2 - n^2) f_1 = 0, \quad (5)$$

$$f_1(a) = 0. \quad (6)$$

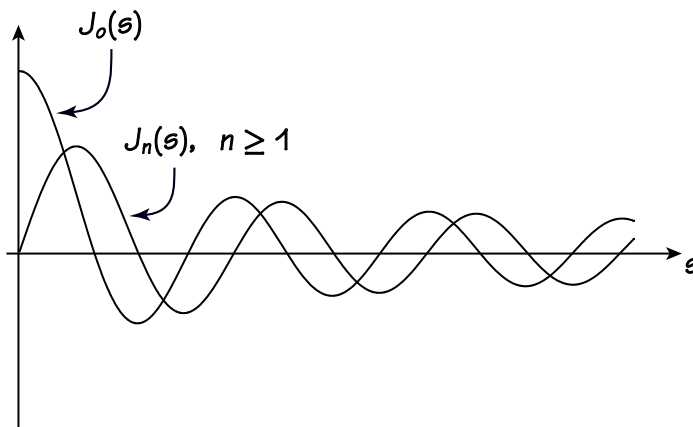
Durch die Substitution

$$s = \kappa r, \quad f(s) = f_1(r)$$

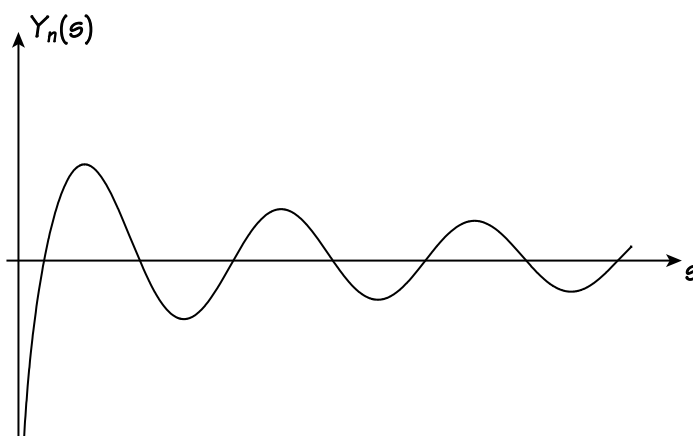
erhalten wir die **Besselsche Differentialgleichung**

$$s^2 f''(s) + s f'(s) + (s^2 - n^2) f = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei linear unabhängige Lösungen, die **Besselsche Funktion erster Gattung** $J_n(s)$ und die **Besselsche Funktion zweiter Gattung** $Y_n(s)$:



- $\lim_{s \rightarrow 0} J_n(s) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases}$
- J_n hat unendlich viele Nullstellen
- $\lim_{s \rightarrow \infty} J_n(s) = 0$.



- $\lim_{s \rightarrow 0} Y_n(s) = -\infty$
- Y_n hat unendlich viele Nullstellen
- $\lim_{s \rightarrow \infty} Y_n(s) = 0$

Die allgemeine Lösung von (5) ist also

$$f_1(r) = C_n J_n(\kappa r) + D_n Y_n(\kappa r).$$

Damit die Lösung im Nullpunkt stetig ist, müssen wir $D_n = 0$ setzen.

Aus (6) folgt

$$C_n J_n(\kappa a) = 0$$

und wir erhalten eine nichttriviale Lösung für f_1 durch die Wahl

$$\kappa = \frac{j_{mn}}{a},$$

wobei

$$0 < j_{1n} < j_{2n} < j_{3n} < \dots$$

die Nullstellen von J_n sind. Damit ist

$$f_1(r) = C_{mn} J_n\left(\frac{j_{mn}r}{a}\right), \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die entsprechende Gleichung für f_3 ist

$$\begin{aligned} f_3''(t) + \frac{j_{mn}^2}{a^2} f_3(t) &= 0 \\ \Rightarrow f_3(t) &= E_{mn} \sin\left(\frac{j_{mn}t}{a}\right) + F_{mn} \cos\left(\frac{j_{mn}t}{a}\right). \end{aligned}$$

Die trennbaren Lösungen sind also

$$\begin{aligned} u_{m0}(r, \theta, t) &= J_0\left(\frac{j_{m0}r}{a}\right) \left(A_{m0} \sin\left(\frac{j_{m0}t}{a}\right) + B_{m0} \cos\left(\frac{j_{m0}t}{a}\right) \right), \quad m = 1, 2, \dots, \\ u_{mn}(r, \theta, t) &= J_n\left(\frac{j_{mn}r}{a}\right) \left(A_{mn} \sin\left(\frac{j_{mn}t}{a}\right) + B_{mn} \cos\left(\frac{j_{mn}t}{a}\right) \right) \\ &\quad \times (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)), \quad m, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

□

Beispiel

Finden Sie alle trennbaren Lösungen der dreidimensionalen Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0, \quad r < a, \quad (1)$$

wobei (r, θ, ϕ) die üblichen Kugelkoordinaten sind.

Lösung

Wir brauchen die Formel

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten.

Wir suchen eine Lösung von (1) der Form

$$u(r, \theta, \phi) = G(r, \theta) f_1(\phi), \quad \text{'Separationsansatz'}$$

so dass

$$\frac{\sin^2 \theta}{G} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{G} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) = -\frac{f_1''(\phi)}{f_1(\phi)} = k_2.$$

Die Funktion f_1 genügt also den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1''(\phi) + k_2 f_1(\phi) &= 0, \\ f_1(\phi + 2\pi) &= f_1(\phi). \end{aligned}$$

Wie im letzten Beispiel folgern wir, dass $k_2 = n^2$, $n = 0, 1, \dots$ ist und

$$f_1(\phi) = \begin{cases} A_0, & n = 0, \\ A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi), & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Nun suchen wir eine Lösung von

$$\sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) - n^2 G = 0$$

der Form

$$G(r, \theta) = f_2(r) f_3(\theta), \quad \text{'Separationsansatz'}$$

so dass

$$\frac{f_2''(r)}{f_2(r)} + 2r \frac{f_2'(r)}{f_2(r)} = -\frac{1}{f_3(\theta)} \left(\cot \theta f_3'(\theta) + f_3''(\theta) - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right) = k_2.$$

Die Gleichung

$$\cot \theta f_3'(\theta) + f_3''(\theta) + \left(k_2 - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right) f_3(\theta) = 0, \quad \theta \in [0, \pi]$$

für f_3 wird durch die Substitution

$$x = \cos \theta, \quad f(x) = f_3(\theta)$$

in

$$(1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x) + \left(k_2 - \frac{n^2}{1 - x^2}\right)f(x) = 0, \quad x \in [-1, 1] \quad (2)$$

transformiert.

Ergebnisse aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen zeigen, dass (5) Lösungen besitzt, die auf $[-1, 1]$ stetig sind, falls

$$k_2 = \ell(\ell + 1), \quad \ell = n, n + 1, \dots$$

ist. Die Gleichung

$$(1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x) + \left(\ell(\ell + 1) - \frac{n^2}{1 - x^2}\right)f(x) = 0$$

heißt **Legendresche Differentialgleichung**. Diese hat nur eine eine Lösung, die auf $[-1, 1]$ stetig ist, die **zugeordnete Legendre-Funktion**

$$P_\ell^n(x) = (-1)^n (1 - x^2)^{n/2} \frac{d^n}{dx^n} P_\ell(x),$$

wobei

$$P_\ell(x) = \underbrace{\frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell}_{\text{Legendre-Polynom}}$$

ist.

Die allgemeine Lösung für f_3 is also

$$f_3(\theta) = C_{\ell n} P_\ell^n(\cos \theta), \quad 0 \leq n \leq \ell.$$

Die entsprechende Gleichung für f_2 ist

$$f_2''(r) + 2rf_2'(r) - \ell(\ell + 1)f_2(r) = 0,$$

und die allgemeine Lösung dieser **Euler-Gleichung** ist

$$f_1(r) = \begin{cases} C_0 + D_0 \log r, & \ell = 0, \\ C_\ell r^\ell + \frac{D_\ell}{r^{\ell+1}}, & \ell = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Damit die Lösung im Nullpunkt stetig ist, müssen wir $D_0 = 0$ und $B_\ell = 0$, $\ell = 1, 2, 3, \dots$ setzen.

Die trennbaren Lösungen sind also

$$u_{\ell 0}(r, \theta, \phi) = A_{\ell 0} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots,$$

$$u_{\ell n}(r, \theta, \phi) = (A_{\ell n} \cos(n\phi) + B_{\ell n} \sin(n\phi)) r^{\ell} P_{\ell}^n(\cos \theta), \quad 1 \leq n \leq \ell.$$

□

Über Saiten und Membrane

Saiten

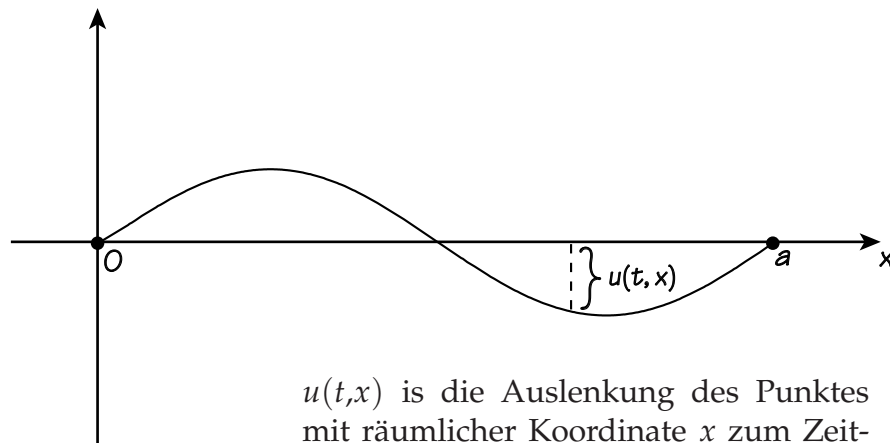
Die $(1 + 1)$ -dimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, a), t > 0 \quad (1)$$

mit Dirichletschen Randbedingungen

$$u = 0, \quad x = 0, a, t > 0 \quad (2)$$

entsteht bei der Modellierung einer eingespannten Saite.



$u(t, x)$ ist die Auslenkung des Punktes mit räumlicher Koordinate x zum Zeitpunkt t

(Annahme: Die Auslenkung ist senkrecht zum Gleichgewichtszustand)

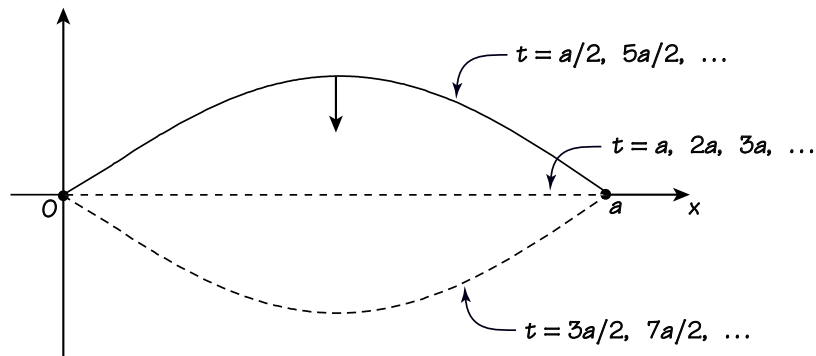
Die trennbaren Lösungen dieses Problems sind

$$u_n(t,x) = \sin \frac{n\pi x}{a} \left(A_n \sin \frac{n\pi t}{a} + B_n \cos \frac{n\pi t}{a} \right),$$

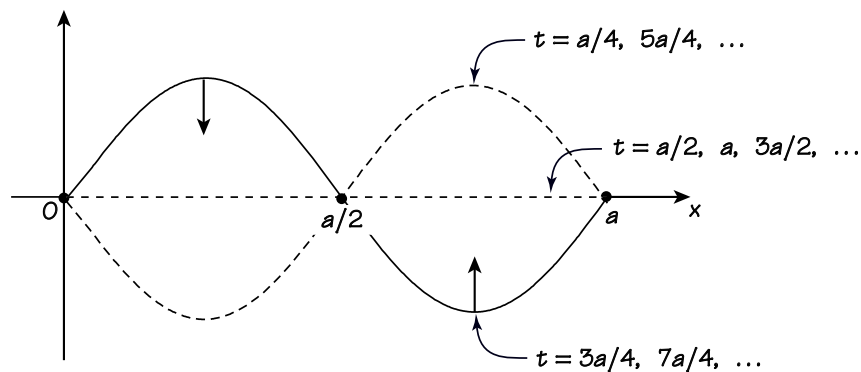
$$= C_n \underbrace{\sin \frac{n\pi x}{a}}_{\text{beschreibt die räumliche Form der Lösung}} \underbrace{\sin \frac{n\pi}{a}(t - D_n)}_{\text{besagt, dass die Lösung zeitlich periodisch mit Frequenz } n\pi/a \text{ ist}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

und werden **Normalmoden** genannt. Sie sind **stehende Wellen**, d.h. örtlich und zeitlich periodische Wellen.

$n = 1$ ($D_n = 0$)

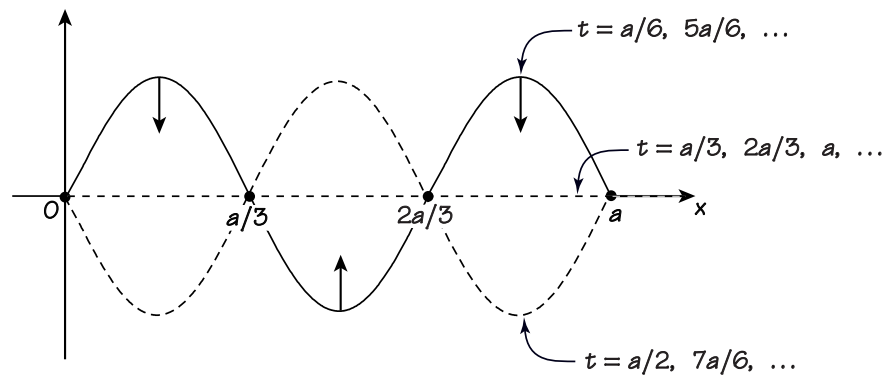


$n = 2$ ($D_n = 0$)



Beachte den **Knotenpunkt** bei $x = a/2$.

$$n = 3 \quad (D_n = 0)$$



Beachte die Knotenpunkte bei $x = a/3$ und $x = 2a/3$.

Die allgemeine Lösung von (1), (2) ist die 'unendliche Summe'

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} \left(A_n \sin \frac{n\pi t}{a} + B_n \cos \frac{n\pi t}{a} \right).$$

Physikalisch gesehen ist dies eine **Superposition** aller möglichen Normalmoden, wobei jede einzelne Mode eine eigene Amplitude C_n und Phase D_n hat.

Die Koeffizienten A_n, B_n (bzw. C_n, D_n) werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt:

$$\begin{aligned} u(0,x) = f(x) &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{a} = f(x) \\ &\Leftrightarrow B_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t(0,x) = f(x) &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} = f(x) \\ &\Leftrightarrow A_n = \frac{a}{n\pi} \cdot \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \end{aligned}$$

Physikalisch bedeutet dies, dass die erzeugte Schwingung davon abhängt, wie die Saite anfänglich gezupft wurde.

Rechteckige Membrane

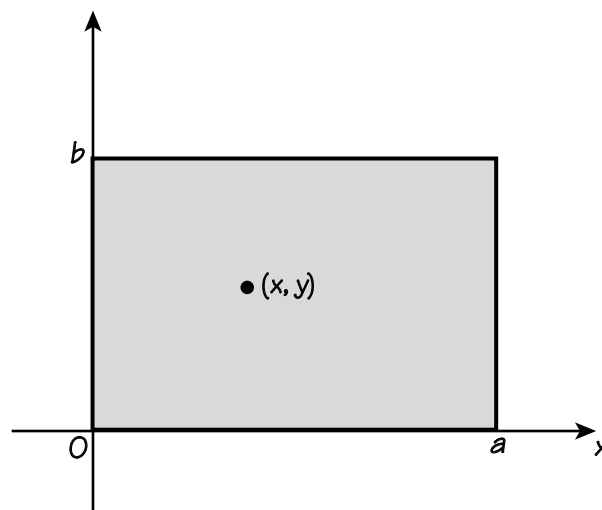
Die $(2 + 1)$ -dimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad x \in (0,a), y \in (0,b), t > 0 \quad (3)$$

mit Dirichletschen Randbedingungen

$$u = 0, \quad x = 0, a \text{ und } y = 0, b, t > 0 \quad (4)$$

entsteht bei der Modellierung eines eingespannten rechteckigen Membrans.



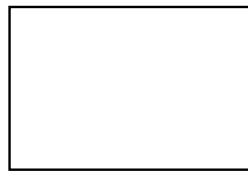
$u(t,x,y)$ ist die Auslenkung des Punktes mit räumlichen Koordinaten (x,y) zum Zeitpunkt t

Die Normalmoden sind

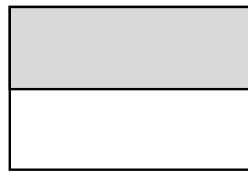
$$\begin{aligned} u_{mn}(t,x,y) &= \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} (A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t) \\ &= C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \omega_{mn} (t - D_{mn}) \end{aligned}$$

mit Frequenzen

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$



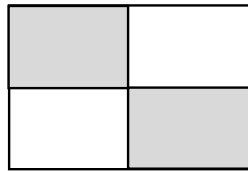
u_{11} , Frequenz ω_{11}



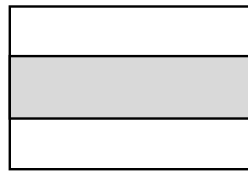
u_{12} , Frequenz ω_{12}



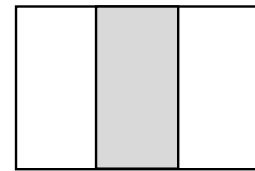
u_{21} , Frequenz ω_{21}



u_{22} , Frequenz ω_{22}



u_{13} , Frequenz ω_{13}



u_{31} , Frequenz ω_{31}

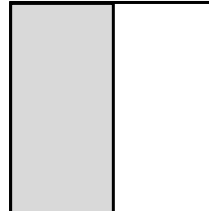
Dieses Diagramm zeigt die **Knotenlinien** der ersten sechs Normalmoden.

Die schraffierten und nichtschraffierten Teile bewegen sich in entgegengesetzten Richtungen.

Falls $a/b \in \mathbb{Q}$ ist, können verschiedene Werte von (m,n) Normalmoden mit derselben Frequenz erzeugen:



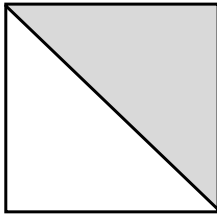
u_{12}



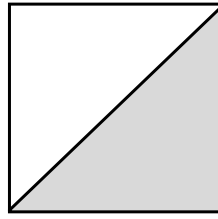
u_{21}

Im Falle eines quadratischen Membrans ($a = b$) haben u_{12} und u_{21} die **degenerierte** Frequenz $\sqrt{5}\pi/a$.

Die Funktion $u_{12} + u_{21}$ ist daher eine stehende Welle mit Frequenz $\sqrt{5}\pi/a$ für alle Werte von A_{12} , A_{21} , B_{12} und B_{21} :



$$B_{21} = 1$$

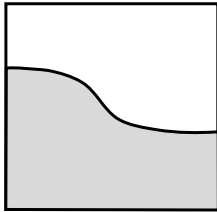


$$B_{21} = -1$$

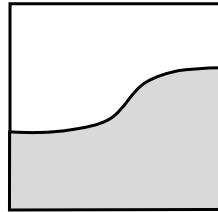
Hier ist $A_{12} = A_{21} = 0$ und $B_{12} = 1$.

Die Knotenlinie ist

$$\left\{ (x,y) : \cos \frac{\pi y}{a} + B_{21} \cos \frac{\pi x}{a} = 0 \right\}.$$



$$B_{21} = \frac{1}{2}$$



$$B_{21} = -\frac{1}{2}$$

Die allgemeine Lösung von (1), (2) ist die Superposition

$$u(t,x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} (A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t),$$

wobei die Koeffizienten A_{mn} , B_{mn} durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden:

$$u(0,x,y) = f(x,y) \Leftrightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = f(x,y)$$

$$\Leftrightarrow B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$u_t(0,x,y) = g(x,y) \Leftrightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{mn} A_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = g(x,y)$$

$$\Leftrightarrow A_{mn} = \frac{4}{\omega_{mn} ab} \int_0^b \int_0^a g(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

Kreisförmige Membrane

Die $(2 + 1)$ -dimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = \Delta u, \quad r < a, t > 0 \quad (5)$$

mit Dirichletschen Randbedingungen

$$u = 0, \quad r = a, t > 0 \quad (6)$$

entsteht bei der Modellierung eines eingespannten kreisförmigen Membrans.

Die Normalmoden sind

$$u_{m0}(t, r) = J_0 \left(\frac{j_{m0} r}{a} \right) (A_{m0} \sin \omega_{m0} t + B_{m0} \cos \omega_{m0} t)$$

mit Frequenzen $\omega_{m0} = j_{m0}/a$,

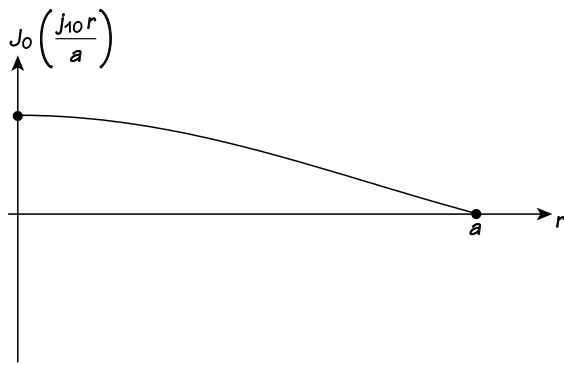
$$u_{mn}(t, r, \theta) = J_n \left(\frac{j_{mn} r}{a} \right) \cos n\theta (A_{mn}^1 \sin \omega_{mn}^1 t + B_{mn}^1 \cos \omega_{mn}^1 t)$$

mit Frequenzen $\omega_{mn}^1 = j_{mn}/a$,

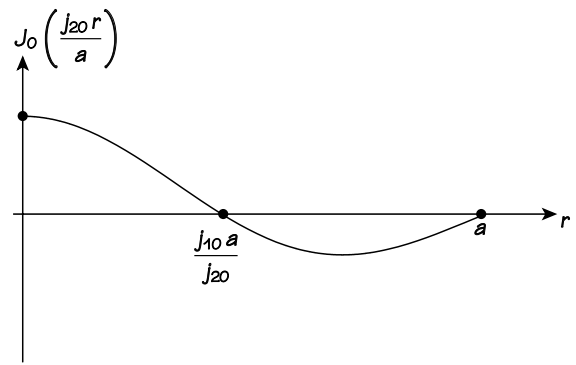
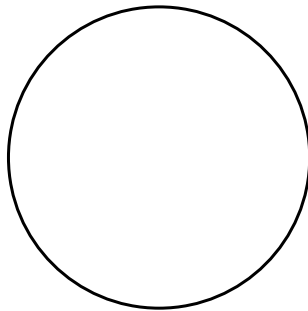
$$u_{mn}(t, r, \theta) = J_n \left(\frac{j_{mn} r}{a} \right) \sin n\theta (A_{mn}^2 \sin \omega_{mn}^2 t + B_{mn}^2 \cos \omega_{mn}^2 t)$$

mit Frequenzen $\omega_{mn}^2 = j_{mn}/a$, wobei J_n die n -te Besselsche Funktion erster Gattung und j_{mn} die m -te Nullstelle von J_n ist.

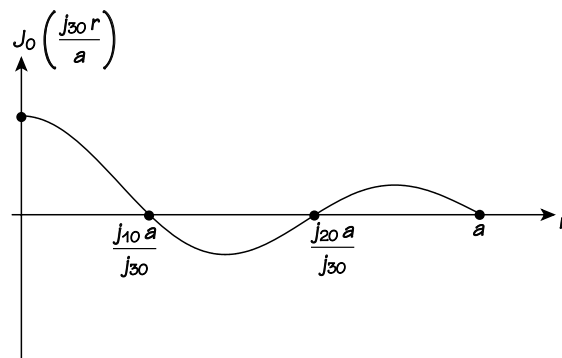
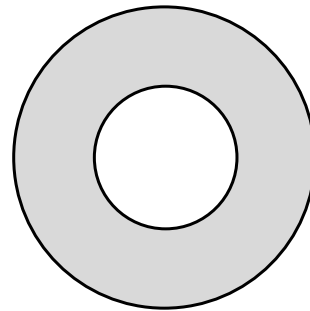
Die Normalmoden u_{m0} sind **radialsymmetrisch**:



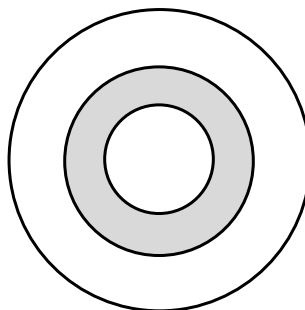
u_{10} hat keine Knotenlinien



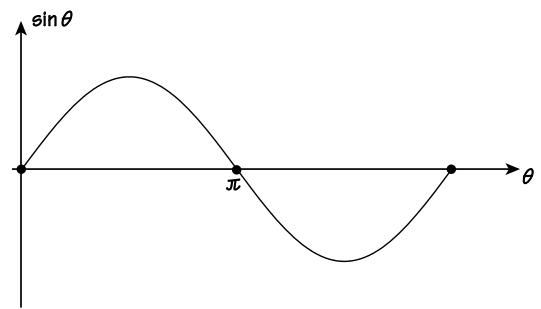
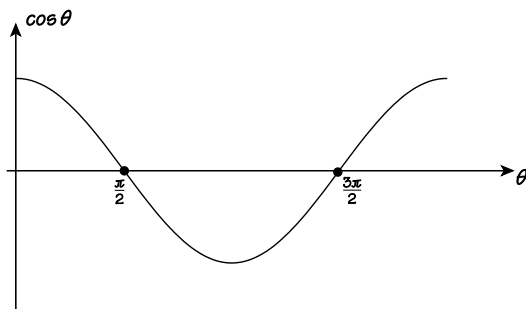
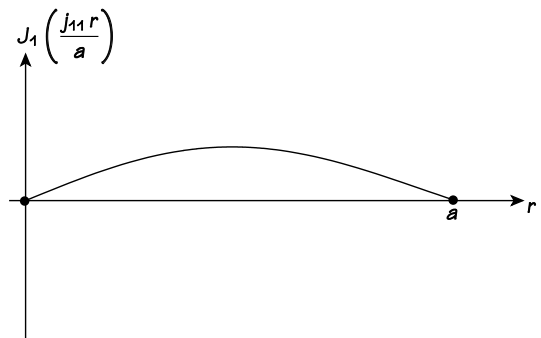
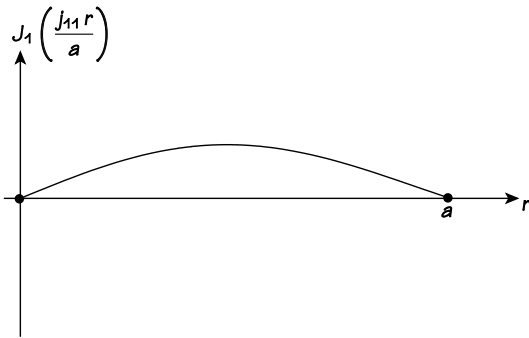
u_{20} hat eine Knotenlinie bei $r = \frac{j_{10}a}{j_{20}}$



u_{30} hat Knotenlinien bei $r = \frac{j_{10}a}{j_{30}}$ und $r = \frac{j_{20}a}{j_{30}}$

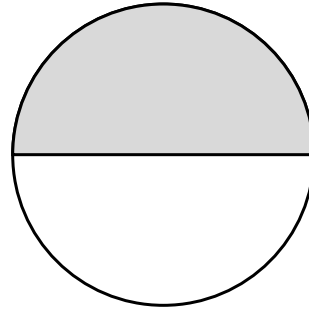
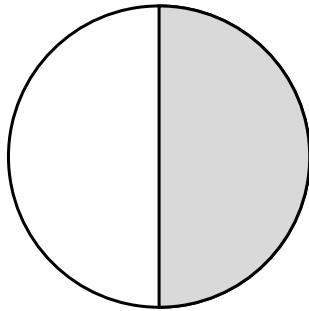


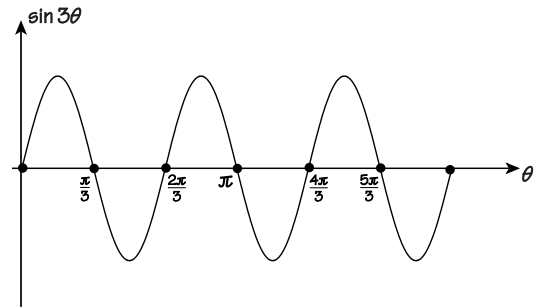
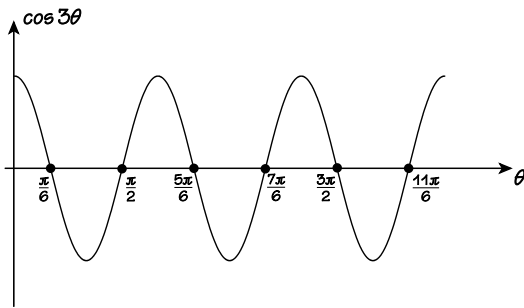
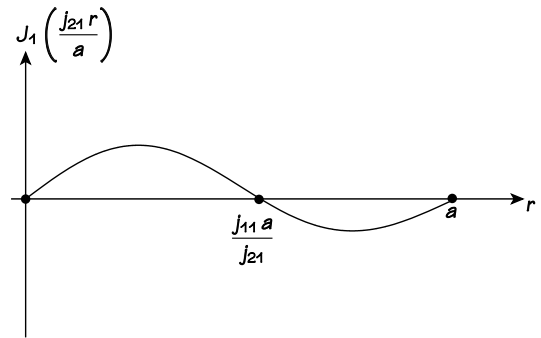
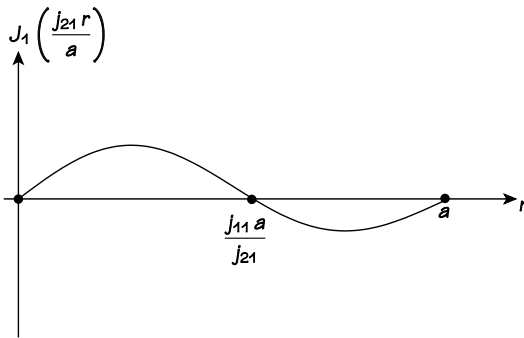
Da $\omega_{mn}^1 = \omega_{mn}^2$ für $n, m = 1, 2, \dots$ ist, sind alle anderen Frequenzen degeneriert:



u_{11}^1 hat Knotenlinien bei $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

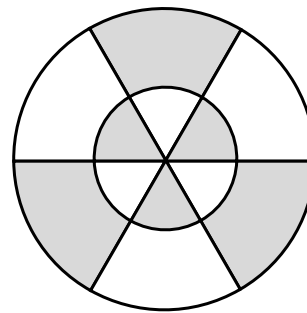
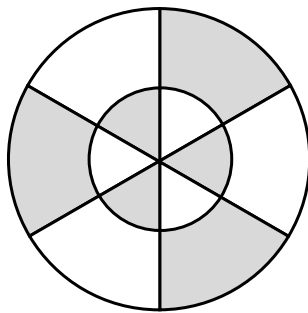
u_{11}^2 hat Knotenlinien bei $\theta = 0, \pi$





u_{23}^1 hat Knotenlinien bei $r = \frac{j_{11}a}{j_{21}}$ und $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

u_{23}^1 hat Knotenlinien bei $r = \frac{j_{11}a}{j_{21}}$ und $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$



Die allgemeinste Schwingung ist die Superposition

$$\begin{aligned}
 u(t,r,\theta) = & \sum_{m=1}^{\infty} J_0\left(\frac{j_{m0}r}{a}\right) (A_{m0} \sin \omega_{m0}t + B_{m0} \cos \omega_{m0}t) \\
 & + J_n\left(\frac{j_{mn}r}{a}\right) \cos n\theta (A_{mn}^1 \sin \omega_{mn}^1 t + B_{mn}^1 \cos \omega_{mn}^1 t) \\
 & + J_n\left(\frac{j_{mn}r}{a}\right) \sin n\theta (A_{mn}^2 \sin \omega_{mn}^2 t + B_{mn}^2 \cos \omega_{mn}^2 t),
 \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $A_{m0}, B_{m0}, A_{mn}^1, B_{mn}^1, A_{mn}^2, B_{mn}^2$ durch die Anfangsbedingungen

$$u(0,r,\theta) = f(r,\theta), \tag{7}$$

$$u_t(0,r,\theta) = g(r,\theta) \tag{8}$$

bestimmt werden.

Lemma

Für $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt

$$\int_0^a r J_n \left(\frac{j_{kn}r}{a} \right) J_n \left(\frac{j_{mn}r}{a} \right) dr = 0, \quad k \neq m$$

und

$$\int_0^a r J_n \left(\frac{j_{kn}r}{a} \right)^2 = \frac{a^2}{2} J_{n+1}(j_{kn})^2.$$

Mit Hilfe dieses Lemmas und (7), (8) können wir die Koeffizienten nun bestimmen.

- Aus (7) folgt

$$\begin{aligned} f(r,\theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_{m0} J_0 \left(\frac{j_{m0}r}{a} \right) + \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{mn}^1 J_n \left(\frac{j_{mn}r}{a} \right) \cos n\theta \\ &\quad + \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{mn}^2 J_n \left(\frac{j_{mn}r}{a} \right) \sin n\theta. \end{aligned}$$

- Betrachte dies als die Fourierreihendarstellung von $f(r,\cdot)$, so dass

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{m0} J_0 \left(\frac{j_{m0}r}{a} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) d\theta, \tag{9}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn}^1 J_n \left(\frac{j_{mn}r}{a} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) \cos n\theta d\theta, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{10}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn}^2 J_n \left(\frac{j_{mn}r}{a} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) \sin n\theta d\theta, \quad n = 1, 2, \dots \tag{11}$$

- Multipliziere (9) mit $rJ_0\left(\frac{j_{k0}r}{a}\right)$ und integriere über $(0,a)$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{m0} \underbrace{\int_0^a r J_0\left(\frac{j_{k0}r}{a}\right) J_0\left(\frac{j_{m0}r}{a}\right) dr}_{= \frac{a^2}{2} J_1(j_{k1}) \delta_{km}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} r J_0\left(\frac{j_{k0}r}{a}\right) f(r,\theta) dr d\theta$$

$$\Rightarrow B_{k0} = \frac{1}{\pi a^2 J_1(j_{k0})^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} r J_0\left(\frac{j_{k0}r}{a}\right) f(r,\theta) dr d\theta, \quad k = 1, 2, \dots$$

- Multipliziere (10) und (11) mit $rJ_n\left(\frac{j_{kn}r}{a}\right)$ und integriere über $(0,a)$:

$$B_{kn}^1 = \frac{1}{\pi a^2 J_{n+1}(j_{kn})^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} r J_n\left(\frac{j_{kn}r}{a}\right) f(r,\theta) \cos n\theta dr d\theta, \quad k, n = 1, 2, \dots,$$

$$B_{kn}^2 = \frac{1}{\pi a^2 J_{n+1}(j_{kn})^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} r J_n\left(\frac{j_{kn}r}{a}\right) f(r,\theta) \sin n\theta dr d\theta, \quad k, n = 1, 2, \dots$$

- Die Koeffizienten

$$A_{kn}^1 = \frac{1}{\pi a^2 J_{n+1}(j_{kn})^2 \omega_{kn}} \int_0^a \int_0^{2\pi} r J_n\left(\frac{j_{kn}r}{a}\right) f(r,\theta) \cos n\theta dr d\theta, \quad k, n = 1, 2, \dots,$$

$$A_{kn}^2 = \frac{1}{\pi a^2 J_{n+1}(j_{kn})^2 \omega_{kn}} \int_0^a \int_0^{2\pi} r J_n\left(\frac{j_{kn}r}{a}\right) f(r,\theta) \sin n\theta dr d\theta, \quad k, n = 1, 2, \dots$$

werden durch eine ähnliche Berechnung mit (8) bestimmt.

Bemerkung

$L^2(\Omega)$ sei der Raum aller über Ω quadratisch integrierbaren Funktionen. $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ heißt **orthonormale Basis** für $L^2(\Omega)$, falls

- $\int_{\Omega} u_m u_k = \delta_{mk}$

- jedes $f \in L^2(\Omega)$ sich als

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m, \quad \alpha_m = \int_{\Omega} f u_m$$

schreiben lässt.

In den obigen Beispielen nutzen wir folgende Fakten aus:

- $\left\{ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine orthonormale Basis für $L^2(0,a)$
- $\left\{ \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}_{m,n=1}^{\infty}$ ist eine orthonormale Basis für $L^2((0,a) \times (0,b))$
- $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi a} J_1(j_{k0})} J_0\left(\frac{j_{k0} r}{a}\right) \right\}_{k=1}^{\infty} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi a} J_{n+1}(j_{kn})} J_n\left(\frac{j_{kn} r}{a}\right) \cos n\theta \right\}_{k,n=1}^{\infty}$
 $\cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi a} J_{n+1}(j_{kn})} J_n\left(\frac{j_{kn} r}{a}\right) \sin n\theta \right\}_{k,n=1}^{\infty}$
 ist eine orthonormale Basis für $L^2(\{r < a\})$.

3 Die Wellengleichung

3.1 Die Wellengleichung im eindimensionalen Raum

In diesem Abschnitt betrachten wir das Anfangswertproblem

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$u_t(0, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung im eindimensionalen Raum

Führe die neuen Koordinaten

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct$$

ein. Aus der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &= -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

so dass (1) in

$$\left(-c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 u = c^2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 u,$$

d.h.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0$$

transformiert wird. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

wobei F und G beliebige Funktionen einer Veränderlichen sind. Die allgemeine Lösung von (1) ist daher

$$u(t,x) = \underbrace{F(x-ct)}_{\substack{\text{Eine Welle, die sich} \\ \text{von links nach rechts} \\ \text{mit Geschwindigkeit} \\ c \text{ bewegt}}} + \underbrace{G(x+ct)}_{\substack{\text{Eine Welle, die sich} \\ \text{von rechts nach links} \\ \text{mit Geschwindigkeit} \\ c \text{ bewegt}}}.$$

Die d'Alembertsche Lösung der Wellengleichung im eindimensionalen Raum

Um die Funktionen F und G zu bestimmen, betrachten wir die Anfangsbedingungen (2) und (3). Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x) + G(x), \\ g(x) &= -cF'(x) + cG'(x), \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x) \\ \Rightarrow F(x) - F(0) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) \, ds \\ \\ G'(x) &= \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x) \\ \Rightarrow G(x) - G(0) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) \, ds \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} F(x-ct) - F(0) &= \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) \, ds, \\ G(x+ct) - G(0) &= \frac{1}{2}f(x+ct) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) \, ds. \end{aligned}$$

Aus den letzten zwei Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} u(t,x) &= F(x-ct) + G(x+ct) \\ &= \frac{1}{2} \left(f(x+ct) + f(x-ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) \, ds, \end{aligned}$$

da $F(0) + G(0) = f(0)$ ist. Dies ist die **d'Alembertsche Lösung der Wellengleichung im eindimensionalen Raum**.

Konsequenzen der d'Alembertschen Lösung der Wellengleichung

1. Eindeutigkeit Die obige Berechnung zeigt, dass jede zweimal stetig differenzierbare Lösung u des Anfangswertproblems (1)–(3) durch die d'Alembertsche Formel gegeben ist.
2. Existenz Es seien $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$. Eine einfache Berechnung zeigt, dass die d'Alembertsche Formel eine Lösung von (1)–(3) definiert.
3. Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten Es seien u und \tilde{u} die Lösungen zu den Anfangswerten f, g bzw. \tilde{f}, \tilde{g} . Dann ist

$$\begin{aligned} & |u(t,x) - \tilde{u}(t,x)| \\ & \leq \frac{1}{2} \left(|f(x-ct) - \tilde{f}(x-ct)| + |f(x+ct) - \tilde{f}(x+ct)| \right) \\ & \quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g(s) - \tilde{g}(s)| ds \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t,x) - \tilde{u}(t,x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \tilde{f}(x)| + t \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - \tilde{g}(x)| \\ \Rightarrow & \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}} |u(t,x) - \tilde{u}(t,x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \tilde{f}(x)| + T \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - \tilde{g}(x)|. \end{aligned}$$

Betrachtet man die Lösung in einem endlichen Zeitintervall $[0, T]$, so hängt sie also stetig von f und g ab.

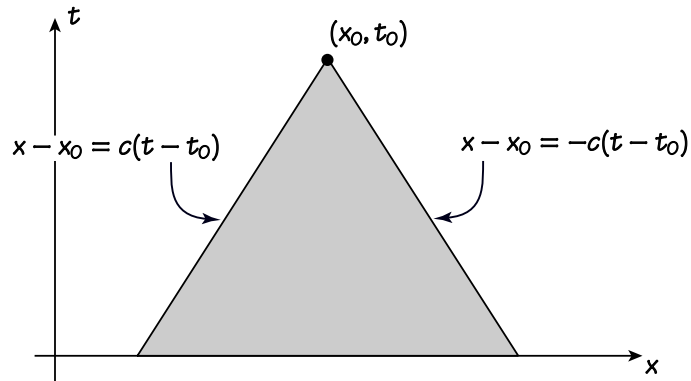
Zu 1.–3. sagt man, dass das Anfangswertproblem **wohlgestellt** ist.

4. Keine glättende Eigenschaft Es seien $f \in C^k(\mathbb{R})$ und $g \in C^{k-1}(\mathbb{R})$. Aus der d'Alembertschen Formel folgt, dass u k -mal stetig differenzierbar und **im Allgemeinen nicht regulärer** ist. Im Allgemeinen lässt sich die Regularität von u nur dadurch steigern, indem die Regularitätsvoraussetzungen an f und g erhöht wird.
5. Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit Die allgemeine Lösung besteht aus einer Welle, die sich nach links mit Geschwindigkeit c bewegt, und einer Welle, die sich nach rechts mit Geschwindigkeit c bewegt. Information breitet sich also mit Geschwindigkeit $\pm c$ aus.

6. Abhängigkeitsbereich Da Information sich mit Geschwindigkeit $\pm c$ ausbreitet, hängt der Wert von u an der Stelle (x_0, t_0) nur von den Werten von u (und u_t) in dem nach unten gerichteten Kegel

$$\{(x, t) : |x - x_0| \leq c(t_0 - t), t < t_0\}$$

in der **Raumzeit** ab:



Die schraffierte Region ist der **Abhängigkeitsbereich** von (x_0, t_0) .

Die Geraden mit Steigungen $\pm 1/c$ durch (x_0, t_0) sind die **Charakteristischen** durch (x_0, t_0) .

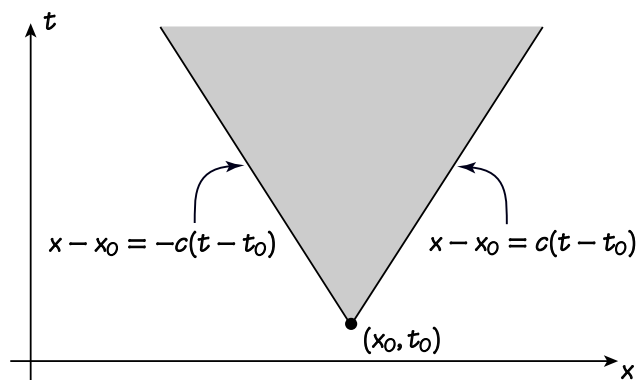
7. Einflußbereich Der **Einflußbereich** von (x_0, t_0) ist die Menge

$$\{(x, t) : (x_0, t_0) \text{ liegt im Abhängigkeitsbereich von } (x, t)\}.$$

Er ist der nach oben gerichtete Kegel

$$\{(x, t) : |x - x_0| \leq c(t - t_0), t > t_0\}$$

in der Raumzeit:



Die schraffierte Region ist der **Einflußbereich** von (x_0, t_0) .

8. Schwache Lösungen Die d'Alembertsche Formel definiert eine gültige Funktion $u(t,x)$ auch im Falle $f \notin C^2(\mathbb{R}), g \notin C^1(\mathbb{R})$. Eine solche Funktion heißt **schwache Lösung** der Wellengleichung im eindimensionalen Raum.

Beispiel

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0,x) &= f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) &= 0, & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei

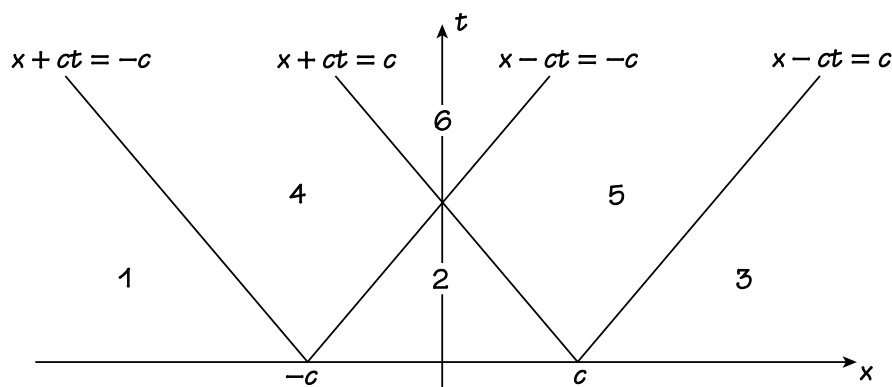
$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq c, \\ 0, & |x| > c. \end{cases}$$

Lösung

Die Lösung ist

$$u(t,x) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)),$$

und wir können eine explizite Formel für u finden, indem wir ein **Raumzeitdiagramm** benutzen:



- Region 1 ($x + ct < -c, x - ct < -c$): $u(x,t) = 0$
- Region 2 ($-c < x + ct < c, -c < x - ct < c$): $u(x,t) = 1$

- Region 3 ($x + ct > c, x - ct > c$): $u(x,t) = 0$
- Region 4 ($-c < x + ct < c, x - ct < -c$): $u(x,t) = 1/2$
- Region 5 ($x + ct > c, -c < x - ct < c$): $u(x,t) = 1/2$
- Region 6 ($x + ct > c, x - ct < -c$): $u(x,t) = 0$

□

3.2 Die Wellengleichung im eindimensionalen Halbraum

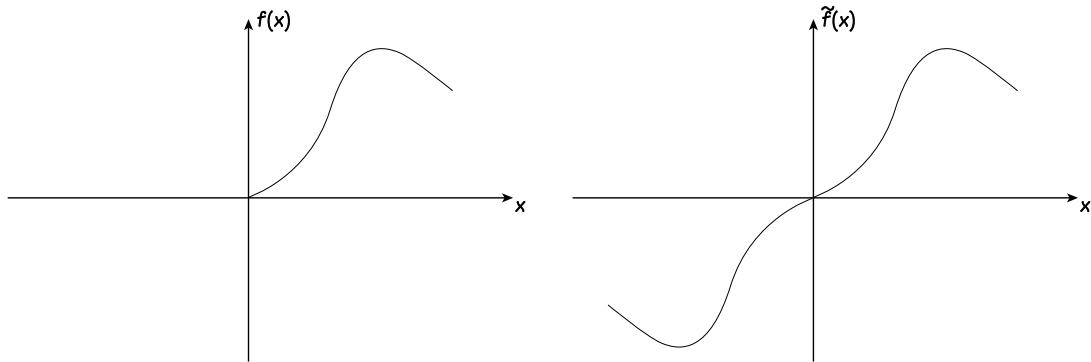
In diesem Abschnitt betrachten wir das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(t,0) &= 0, & t > 0, \\ u(0,x) &= f(x), & x > 0, \\ u_t(0,x) &= g(x), & x > 0, \end{aligned}$$

wobei $f(0) = g(0) = 0$ ist.

Wir können dieses Problem lösen, indem wir u, f und g auf ganz \mathbb{R} durch eine Spiegelung im Ursprung fortsetzen. Definiere

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ -f(-x), & x < 0, \end{cases} \\ \tilde{g}(x) &= \begin{cases} g(x), & x \geq 0, \\ -g(-x), & x < 0, \end{cases} \\ \tilde{u}(t,x) &= \begin{cases} u(t,x), & x \geq 0, \\ -u(t,-x), & x < 0: \end{cases} \end{aligned}$$



Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} &= c^2 \tilde{u}_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \tilde{u}(0, x) &= \tilde{f}(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \tilde{u}_t(0, x) &= \tilde{g}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

so dass \tilde{u} durch die d'Alembertsche Formel

$$\tilde{u}(t, x) = \frac{1}{2} \left(\tilde{f}(x + ct) + \tilde{f}(x - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s) ds$$

gegeben ist. Folglich ist

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left(\tilde{f}(x + ct) + \tilde{f}(x - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s) ds, \quad x > 0.$$

Bemerkung

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u_x(t, 0) &= 0, & t > 0, \\ u(0, x) &= f(x), & x > 0, \\ u_t(0, x) &= g(x), & x > 0, \end{aligned}$$

wobei $f'(0) = g'(0) = 0$ ist, wird analog gefunden, indem man u , f und g auf ganz \mathbb{R} durch eine gewöhnliche Spiegelung fortsetzt.

3.3 Die Wellengleichung im dreidimensionalen Raum

Radialsymmetrische Lösungen der Wellengleichung im dreidimensionalen Raum

In diesem Abschnitt betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 \Delta u, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(0, \mathbf{x}) &= f(r), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(0, \mathbf{x}) &= g(r), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

wobei $r = |\mathbf{x}|$ ist.

Gesucht sei eine Lösung dieses Anfangswertproblems der Form $u = u(r, t)$, so dass

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right), & r > 0, t > 0, \\ u(0, r) &= f(r), & r > 0, \\ u_t(0, r) &= g(r), & r > 0. \end{aligned}$$

Wir lösen dieses Problem durch die Substitution $U = ru$. Aus

$$U_{tt} = ru_{tt}, \quad U_{rr} = 2u_r + ru_{rr}$$

folgt

$$\begin{aligned} U_{tt} &= c^2 U_{rr}, & r > 0, t > 0, \\ U(t, 0) &= 0, & t > 0, \\ U(0, r) &= F(r), & r > 0, \\ U_t(0, r) &= G(r), & r > 0, \end{aligned}$$

wobei $F(r) = rf(r)$ und $G(r) = rg(r)$ ist.

$U(t, r)$ löst also die Wellengleichung im Halbraum $\{r > 0\}$ mit Dirichletscher Randbedingung bei $r = 0$, so dass

$$U(t, r) = \frac{1}{2} \left(\tilde{F}(r + ct) + \tilde{F}(r - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} \tilde{G}(s) ds, \quad r > 0,$$

wobei \tilde{F}, \tilde{G} die Fortsetzungen von F bzw. G auf $\{r \in \mathbb{R}\}$ durch eine Spiegelung im Ursprung sind. Folglich ist

$$u(t,r) = \frac{1}{2r} \left(\tilde{F}(r+ct) + \tilde{F}(r-ct) \right) + \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} \tilde{G}(s) ds, \quad r > 0.$$

Die Wellengleichung im dreidimensionalen Raum

Wir lösen das allgemeine Anfangswertproblem

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0, \quad (1)$$

$$u(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (2)$$

$$u_t(0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (3)$$

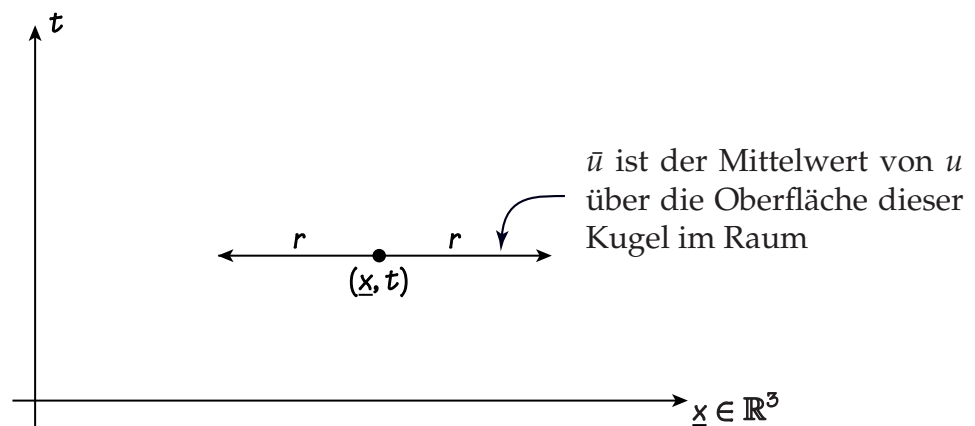
mit der **Methode der sphärischen Mittel**.

Wähle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, r > 0, t > 0$ und definiere

$$\bar{f}(\mathbf{x}, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}),$$

$$\bar{g}(\mathbf{x}, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}),$$

$$\bar{u}(\mathbf{x}, r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}).$$



Lemma

Es sei $u(\mathbf{x},t)$ eine Lösung des Anfangswertproblem (1)–(3). Für jedes feste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ genügen die sphärischen Mittel $\bar{u}, \bar{f}, \bar{g}$ den **Euler-Poisson-Darboux-Gleichungen**

$$\begin{aligned} \bar{u}_{tt} &= c^2 \left(\bar{u}_{rr} + \frac{2}{r} \bar{u}_r \right), & r > 0, t > 0, \\ \bar{u}(\mathbf{x},r,0) &= \bar{f}(\mathbf{x},r), & r > 0, \\ \bar{u}_t(\mathbf{x},r,0) &= \bar{g}(\mathbf{x},r), & r > 0. \end{aligned}$$

Beweis

Die Gleichung

$$\int_{B_r(\mathbf{x})} u_{tt}(\mathbf{y},t) dV(\mathbf{y}) = c^2 \int_{B_r(\mathbf{x})} \Delta u(\mathbf{y},t) dV(\mathbf{y}) = c^2 \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y},t) dS(\mathbf{y}) \quad (4)$$

folgt aus (1) und der Vektoridentität

$$\int_V \Delta w(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) = \int_{\partial V} \frac{\partial w}{\partial n} dS(\mathbf{y}).$$

Nun führen wir Kugelkoordinaten

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \cos \phi \\ \rho \sin \theta \sin \phi \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

ein. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{B_r(\mathbf{x})} u_{tt}(\mathbf{y},t) dV(\mathbf{y}) &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_{tt}(\rho,\theta,\phi,t) \rho^2 \sin \theta d\theta d\phi d\rho \\ &= \int_0^r 4\pi \rho^2 \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi \rho^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_{tt}(\rho,\theta,\phi,t) \rho^2 \sin \theta d\theta d\phi \right)}_{= \frac{1}{4\pi \rho^2} \int_{\partial B_\rho(\mathbf{x})} u_{tt}(\mathbf{y},t) dS(\mathbf{y})} d\rho \\ &= \int_0^r 4\pi \rho^2 \bar{u}_{tt}(\mathbf{x},\rho,t) d\rho \end{aligned} \quad (5)$$

und

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \theta, \phi, t) \Big|_{\rho=r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
 &= r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta, \phi, t) \sin \theta d\theta d\phi \\
 &= r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \phi, t) \sin \theta d\theta d\phi \right) \\
 &= 4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \phi, t) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \right) \\
 &= 4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \right) \\
 &= 4\pi r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(\mathbf{x}, r, t). \tag{6}
 \end{aligned}$$

Aus (4)–(6) folgt

$$\int_0^r \rho^2 \bar{u}_{tt}(\mathbf{x}, \rho, t) d\rho = c^2 r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(\mathbf{x}, r, t),$$

und Differenzieren nach r liefert

$$\begin{aligned}
 r^2 \bar{u}_{tt} &= c^2 (2r \bar{u}_r + r^2 \bar{u}_{rr}) \\
 \Rightarrow \bar{u}_{tt} &= c^2 \left(\bar{u}_{rr} + \frac{2}{r} \bar{u}_r \right).
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen

$$\bar{u}(\mathbf{x}, r, 0) = \bar{f}(\mathbf{x}, r), \quad \bar{u}_t(\mathbf{x}, r, 0) = \bar{g}(\mathbf{x}, r)$$

folgen direkt aus

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}).$$

□

Das vorige Lemma besagt: Für jedes feste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ist die Funktion \bar{u} eine radialsymmetrische Lösung der Wellengleichung im dreidimensionalen Raum mit Anfangswerten \bar{f}, \bar{g} . Daher gilt

$$\bar{u}(\mathbf{x}, r, t) = \frac{1}{2r} \left(\bar{F}(\mathbf{x}, r + ct) + \bar{F}(\mathbf{x}, r - ct) \right) + \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} \bar{G}(\mathbf{x}, s) ds,$$

wobei \tilde{F} , \tilde{G} die Fortsetzungen von $F(\mathbf{x}, r) := r\bar{f}(\mathbf{x}, r)$ bzw. $G(\mathbf{x}, r) := r\bar{g}(\mathbf{x}, r)$ von $\{r > 0\}$ auf $\{r \in \mathbb{R}\}$ durch eine Spiegelung im Ursprung sind, d.h.

$$\tilde{F}(\mathbf{x}, r) = \begin{cases} r\bar{f}(\mathbf{x}, r), & r \geq 0, \\ r\bar{f}(\mathbf{x}, -r), & r < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, r) = \begin{cases} r\bar{g}(\mathbf{x}, r), & r \geq 0, \\ r\bar{g}(\mathbf{x}, -r), & r < 0. \end{cases}$$

Satz

Jede Lösung $u(\mathbf{x}, t)$ des Anfangswertproblem (1)–(3) ist durch die **Kirchhoffsche Formel**

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \right)$$

gegeben.

Beweis

Der Schlüssel ist die Beobachtung, dass

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \downarrow 0} \bar{u}(\mathbf{x}, r, t)$$

für jedes feste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und $t > 0$ ist.

Da wir den Grenzwert $r \downarrow 0$ untersuchen, dürfen wir annehmen, dass $0 < r < ct$ ist. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{x}, r, t) &= \frac{1}{2r} \left((r + ct)\bar{f}(\mathbf{x}, r + ct) + (r - ct)\bar{f}(\mathbf{x}, ct - r) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2cr} \int_0^{r+ct} s\bar{g}(\mathbf{x}, s) \, ds + \frac{1}{2cr} \underbrace{\int_{r-ct}^0 s\bar{g}(\mathbf{x}, -s) \, ds}_{= - \int_0^{ct-r} s\bar{g}(\mathbf{x}, s) \, ds} \\ &= \frac{1}{2r} \left((ct + r)\bar{f}(\mathbf{x}, ct + r) - (ct - r)\bar{f}(\mathbf{x}, ct - r) \right) + \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{ct+r} s\bar{g}(\mathbf{x}, s) \, ds. \end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} H(s) \, ds = H(a)$$

finden wir

$$\begin{aligned} \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{ct+r} s \bar{g}(\mathbf{x}, s) \, ds &= \frac{1}{c} ct \bar{g}(\mathbf{x}, ct) \\ &= t \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

und aus dem Ergebnis

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{2h} \left(H(a+h) - H(a-h) \right) = H'(a)$$

finden wir

$$\begin{aligned} \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2r} \left((ct+r) \bar{f}(\mathbf{x}, ct+r) - (ct-r) \bar{f}(\mathbf{x}, ct-r) \right) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \bar{f}(\mathbf{x}, \xi)) \right|_{\xi=ct} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (ct \bar{f}(\mathbf{x}, ct)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (t \bar{f}(\mathbf{x}, ct)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \right). \end{aligned}$$

□

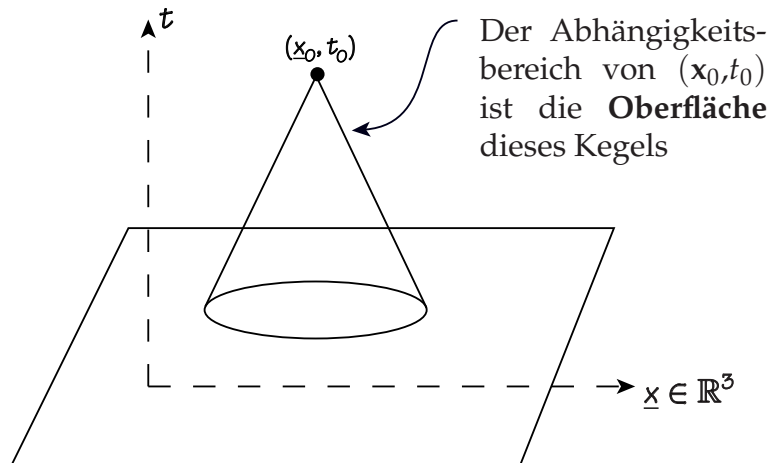
Bemerkungen

1. Der obige Satz impliziert die Eindeutigkeit der Lösung: Jede Lösung des Anfangswertproblems (1)–(3) ist durch die Kirchhoffsche Formel gegeben. Die Existenz einer Lösung folgt daraus, dass die Kirchhoffsche Formel eine Lösung des Anfangswertproblems definiert, wie eine einfache Berechnung zeigt.

2. Da Information sich mit Geschwindigkeit c ausbreitet, hängt der Wert von u an der Stelle (\mathbf{x}_0, t_0) nur von den Werten von u (und u_t) in dem nach unten gerichteten Kegel $\{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq c(t_0 - t), t < t_0\}$ in der Raumzeit ab. Allerdings enthält die Kirchhoffsche Formel nur Integrale über sphärische **Oberflächen**, so dass der Abhängigkeitsbereich von (\mathbf{x}_0, t_0) die Oberfläche

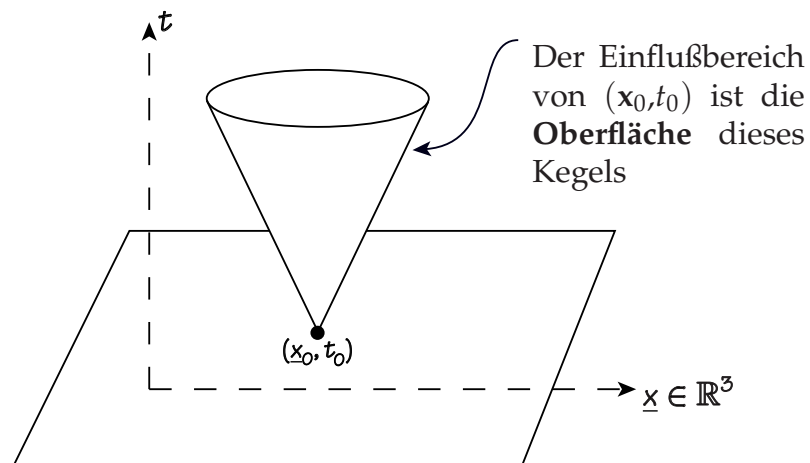
$$\{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = c(t_0 - t), t < t_0\}$$

des Kegels ist.



Der Einflußbereich von (\mathbf{x}_0, t_0) ist die Oberfläche des entsprechenden nach oben gerichteten Kegels, d.h.

$$\{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = c(t - t_0), t > t_0\}.$$



Dieses Ergebnis ist **das Huygensche Prinzip** für die dreidimensionale Wellengleichung.

3.4 Die Wellengleichung im zweidimensionalen Raum

In diesem Abschnitt lösen wir das Anfangswertproblem

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \quad (1)$$

$$u(0, x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

$$u_t(0, x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

Satz

Jede Lösung $u(t, x, y)$ des Anfangswertproblems (1)–(3) ist durch die **Poissonsche Formel**

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{B_{ct}(x, y)} \frac{g(\tilde{x}, \tilde{y})}{(c^2 t^2 - (\tilde{x} - x)^2 - (\tilde{y} - y)^2)^{1/2}} d\tilde{x} d\tilde{y} \\ + \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{B_{ct}(x, y)} \frac{f(\tilde{x}, \tilde{y})}{(c^2 t^2 - (\tilde{x} - x)^2 - (\tilde{y} - y)^2)^{1/2}} d\tilde{x} d\tilde{y} \right)$$

gegeben.

Beweis

Wir betrachten $u(t, x, y)$ als Funktion $u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$, die nicht von z abhängt und daher die Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0$$

mit Anfangswerten $u|_{t=0} = f$, $u_t|_{t=0} = g$ erfüllt, wobei $f(x, y)$, $g(x, y)$ ebenfalls als z -unabhängige Funktionen $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ betrachtet werden. Laut der Kirchhoffschen Formel gilt also

$$u(t, x, y) = u(\mathbf{x}, t) \Big|_{z=0} \\ = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x, y, 0)} g(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x, y, 0)} f(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \right).$$

Wir erhalten die Poissonsche Formel, indem wir über z in der obigen Formel integrieren. Dies ist die **Hadamardsche Absteigemethode**.

Es gilt

$$\begin{aligned}\partial B_{ct}(x,y,0) &= \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) : (\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{y} - y)^2 + \tilde{z}^2 = c^2 t^2\} \\ &= \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) : \tilde{z} = \pm(c^2 t^2 - (\tilde{x} - x)^2 - (\tilde{y} - y)^2)^{1/2}\} \\ &= \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) : (\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{y} - y)^2 \leq c^2 t^2, \tilde{z} = \pm h(\tilde{x}, \tilde{y})\} \\ &= \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) : (\tilde{x}, \tilde{y}) \in B_{ct}(x,t), \tilde{z} = \pm h(\tilde{x}, \tilde{y})\},\end{aligned}$$

wobei

$$h(\tilde{x}, \tilde{y}) = (c^2 t^2 - (\tilde{x} - x)^2 - (\tilde{y} - y)^2)^{1/2}$$

ist. Damit ist

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_{ct}(x,y,0)} g(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) &= 2 \iint_{B_{ct}(x,y)} g(\tilde{x}, \tilde{y}) (1 + h_{\tilde{x}}^2 + h_{\tilde{y}}^2)^{1/2} \, d\tilde{x} \, d\tilde{y} \\ &= 2ct \iint_{B_{ct}(x,y)} \frac{g(\tilde{x}, \tilde{y})}{(c^2 t^2 - (\tilde{x} - x)^2 - (\tilde{y} - y)^2)^{1/2}} \, d\tilde{x} \, d\tilde{y},\end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned}1 + h_{\tilde{x}}^2 + h_{\tilde{y}}^2 &= 1 + \left(-\frac{(\tilde{x} - x)}{h}\right)^2 + \left(-\frac{(\tilde{y} - y)}{h}\right)^2 \\ &= \frac{c^2 t^2}{h^2} \\ &= \frac{c^2 t^2}{c^2 t^2 - (\tilde{x} - x)^2 - (\tilde{y} - y)^2}\end{aligned}$$

ist.

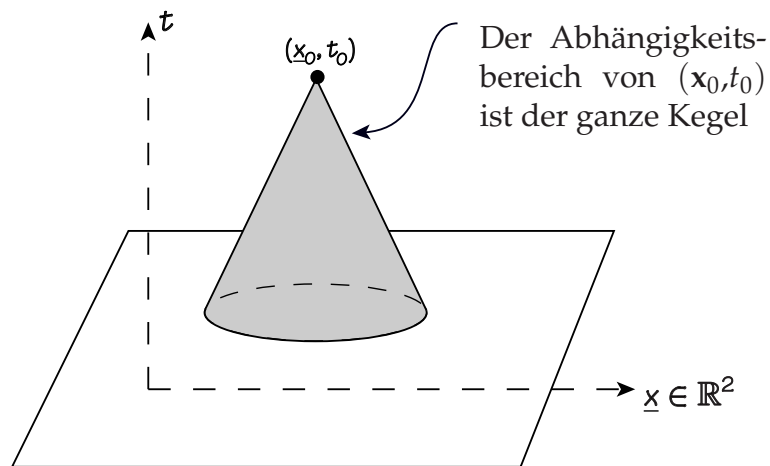
Ebenfalls ist

$$\int_{\partial B_{ct}(x,y,0)} f(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) = 2ct \iint_{B_{ct}(x,y)} \frac{f(\tilde{x}, \tilde{y})}{(c^2 t^2 - (\tilde{x} - x)^2 - (\tilde{y} - y)^2)^{1/2}} \, d\tilde{x} \, d\tilde{y}.$$

□

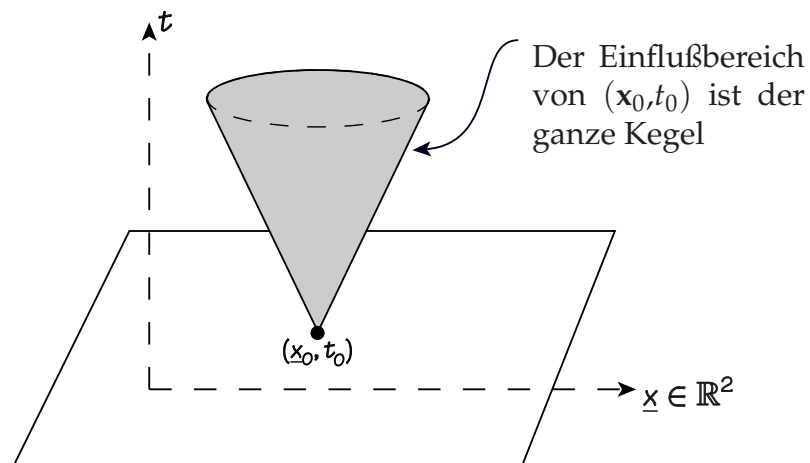
Bemerkungen

1. Existenz und Eindeutigkeit folgen durch das übliche Argument.
2. Die Poissonsche Formel zeigt, dass der Abhängigkeitsbereich von (\mathbf{x}_0, t_0) der **ganze** nach unten gerichtete Kegel $\{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq c(t_0 - t), t < t_0\}$ ist.



Der Einflußbereich von (\mathbf{x}_0, t_0) ist der ganze entsprechende nach oben gerichteten Kegels, d.h.

$$\{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \geq c(t - t_0), t > t_0\}.$$



Dieses Ergebnis ist **das Huygensche Prinzip** für die zweidimensionale Wellengleichung.

Bemerkung

Warum können wir die Methode der sphärischen Mittel nicht direkt auf die Wellengleichung im zweidimensionalen Raum anwenden?

Im zweidimensionalen Fall ist das sphärische Mittel

$$\bar{u}(x,y,r,t) = \frac{1}{2\pi r} \int_{B_r(x,y)} u(t,x,y) \, dx \, dy$$

zwar eine radialsymmetrische Lösung der Wellengleichung im zweidimensionalen Raum, d.h.

$$\bar{u}_{tt} = c^2 \left(\bar{u}_{rr} + \frac{1}{r} \bar{u}_r \right) \quad (\star)$$

für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Es existiert aber keine Substitution, die analog zur Substitution $U = ru$ im dreidimensionalen Fall die Gleichung (\star) in eine andere Gleichung transformiert, die wir explizit lösen können.

4 Die Wärmeleitungsgleichung

4.1 Das Maximumsprinzip

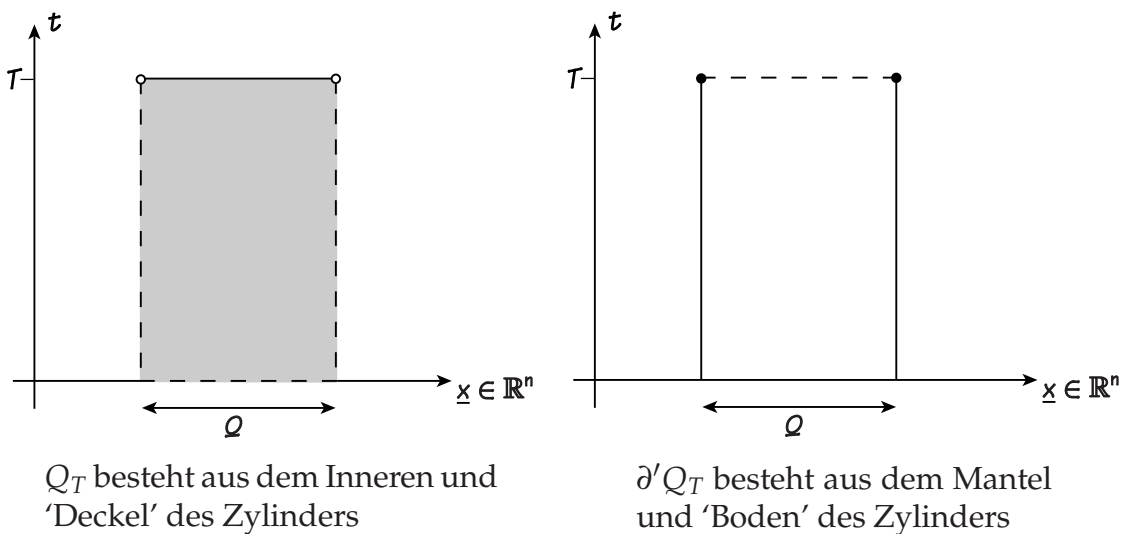
Es sei Ω eine offene, beschränkte, zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^n . Definiere

$$Q_T = \Omega \times (0, T].$$

Die Menge

$$\partial' Q_T := (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$$

heißt der **parabolische Rand** von Q_T :



Satz (Das schwache Maximumsprinzip)

$u \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ erfülle

$$u_t - \Delta u \leq 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T.$$

Dann ist

$$\max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T} u(\mathbf{x}, t),$$

d.h. das Maximum von u über \overline{Q}_T wird in einem Punkt des parabolischen Randes von Q_T angenommen.

Beweis

Zunächst behandeln wir den Sonderfall

$$u_t - \Delta u < 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T.$$

Nehmen wir an, u nimmt sein Maximum über \overline{Q}_T in einem Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0) \notin \partial' Q_T$, so dass $\mathbf{x}_0 \in \Omega, 0 < t_0 \leq T$.

Aus der Differentialrechnung folgt

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} u(\mathbf{x}_0, t_0) &= 0, & j = 1, \dots, n & & (\mathbf{x}_0 \text{ ist kritischer Punkt von } u(\cdot, t_0)), \\ \partial_{x_j}^2 u(\mathbf{x}_0, t_0) &\leq 0, & j = 1, \dots, n & & (\mathbf{x}_0 \text{ ist ein lokales Maximum von } u(\cdot, t_0)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_t u(\mathbf{x}_0, t_0) &= 0, & \text{falls } t_0 < T & & (t_0 \text{ ist kritischer Punkt von } u(\mathbf{x}_0, \cdot)), \\ \partial_t u(\mathbf{x}_0, t_0) &\geq 0, & \text{falls } t_0 = T & & (t_0 \text{ ist ein lokales Maximum von } u(\mathbf{x}_0, \cdot)) \end{aligned}$$

↑

einseitige Ableitung

Damit ist

$$u_t(\mathbf{x}_0, t_0) - \Delta u(\mathbf{x}_0, t_0) \geq 0,$$

was unserer Annahme

$$u_t - \Delta u < 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T$$

widerspricht.

Nun wenden wir uns dem allgemeinen Fall

$$u_t - \Delta u \leq 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T$$

zu. Definiere

$$v_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) - \varepsilon t,$$

so dass

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - \varepsilon < 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T$$

für jeden positiven Wert von ε . Dem Sonderfall zufolge gilt

$$\max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T} v_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T} v_\varepsilon(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

Da $v_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \rightarrow u(\mathbf{x}, t)$ **gleichmäßig** in \overline{Q}_T für $\varepsilon \rightarrow 0$, gilt

$$\begin{aligned} \max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T} v_\varepsilon(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T} u(\mathbf{x}, t), \\ \max_{(\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T} v_\varepsilon(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \max_{(\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T} u(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$. Gleichung (1) ergibt also

$$\max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T} u(\mathbf{x}, t).$$

□

Korollar

In der obigen Notation gilt:

1. $u_t - \Delta u \geq 0$ in $Q_T \Rightarrow$ Das Minimum von u wird in einem Punkt von $\partial' Q_T$ angenommen
2. $u_t - \Delta u = 0$ in $Q_T \Rightarrow$ Das Maximum und Minimum von u werden in Punkten von $\partial' Q_T$ angenommen

Lemma (Vergleichsprinzip)

Es erfüllen $u, v \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$

$$\begin{array}{lll} u_t - \Delta u = f_1, & v_t - \Delta v = f_2, & (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \\ u = g_1, & v = g_2, & (\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T, \\ u|_{t=0} = h_1, & v|_{t=0} = h_2, & \mathbf{x} \in \Omega, \end{array}$$

wobei $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2$ stetige Funktionen mit

$$f_1 \leq f_2, \quad g_1 \leq g_2, \quad h_1 \leq h_2$$

sind.

Dann gilt

$$u \leq v, \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T.$$

Beweis

Die Funktion $w = u - v$ erfüllt die Gleichungen

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w &\leq 0, & (\mathbf{x}, t) &\in Q_T, \\ w &\leq 0, & (\mathbf{x}, t) &\in \partial' Q_T. \end{aligned}$$

Dem schwachen Maximumsprinzip zufolge gilt also

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}, t) &\leq \max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T} w(\mathbf{x}, t) \\ &= \max_{(\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T} w(\mathbf{x}, t) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

für alle $(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T$. □

Lemma (Eindeutigkeitsaussage)

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f, & (\mathbf{x}, t) &\in Q_T, \\ u &= g, & (\mathbf{x}, t) &\in \partial\Omega, \\ u|_{t=0} &= h, & \mathbf{x} &\in \Omega, \end{aligned}$$

wobei f, g, h stetige Funktionen sind, besitzt höchstens eine Lösung $u \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$.

Beweis

Nehmen wir an, es gibt zwei Lösungen u_1, u_2 , so dass $u = u_1 - u_2$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, & (\mathbf{x}, t) &\in Q_T, \\ u &= 0, & (\mathbf{x}, t) &\in \partial\Omega, \\ u|_{t=0} &= 0, & \mathbf{x} &\in \Omega \end{aligned}$$

erfüllt. Aus dem schwachen Maximums- bzw. Minimumsprinzip folgt

$$\begin{aligned}\max_{(\mathbf{x},t) \in \overline{Q}_T} u(\mathbf{x},t) &= \max_{(\mathbf{x},t) \in \partial' Q_T} u(\mathbf{x},t) = 0, \\ \min_{(\mathbf{x},t) \in \overline{Q}_T} u(\mathbf{x},t) &= \min_{(\mathbf{x},t) \in \partial' Q_T} u(\mathbf{x},t) = 0,\end{aligned}$$

so dass $u(\mathbf{x},t) = 0$ für alle $(\mathbf{x},t) \in \overline{Q}_T$ ist. □

Satz (Das starke Maximumsprinzip)

$u \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ erfülle

$$u_t - \Delta u \leq 0, \quad (\mathbf{x},t) \in Q_T.$$

Dann ist

$$u(\mathbf{x},t) < \max_{(\mathbf{x},t) \in \partial' Q_T} u(\mathbf{x},t)$$

für alle $(\mathbf{x},t) \in Q_T$, es sei denn, u ist konstant.

Bemerkung

Es gilt das entsprechende starke Minimumsprinzip.

Korollar

$u \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ erfülle

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u, & (\mathbf{x},t) &\in Q_T, \\ u &= 0, & (\mathbf{x},t) &\in \partial\Omega, \\ u|_{t=0} &= g, & \mathbf{x} &\in \Omega,\end{aligned}$$

wobei $g \in C(\overline{\Omega})$ die Eigenschaften $g \geq 0$ und $g \not\equiv 0$ hat. Dann gilt

$$u(\mathbf{x},t) > 0$$

für alle $(\mathbf{x},t) \in Q_T$.

Beweis

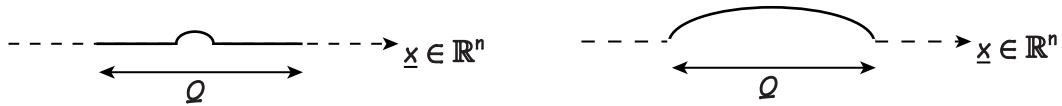
Bemerke zunächst, dass u nicht konstant ist, denn die Konstante müßte Null sein, was der Voraussetzung an g widerspricht. Aus dem starken Minimumsprinzip folgt also

$$u(\mathbf{x}, t) > \min_{(\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_T} u(\mathbf{x}, t) = 0$$

für alle $(\mathbf{x}, t) \in Q_T$. □

Bemerkung

Das obige Korollar besagt, dass Informationen sich mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten:



Nehmen wir an, $u(\mathbf{x}, 0)$ ist Null außer in einem kleinen Intervall, wo es positiv ist.

Nun ist $u(\mathbf{x}, 0) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$. Die kleine anfängliche Störung des trivialen Zustandes hat den Wert von u in allen Punkten von Ω sofort beeinflusst: Sie hat sich mit unendlicher Geschwindigkeit ausgebreitet.

4.2 Die Wärmeleitungsgleichung im n -dimensionalen Raum

In diesem Abschnitt betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

mit Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = g, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Wir beginnen mit einer besonderen Lösung der homogenen Gleichung

$$u_t = \Delta u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Definition

Die Funktion

$$K(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|\mathbf{x}|^2/4t}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

heißt der **Gaußsche Kern**.

Lemma

Der Gaußsche Kern hat die folgenden Eigenschaften.

1. K ist unendlich oft differenzierbar für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$;
2. K löst die Wärmeleitungsgleichung für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$;
3. $K(\mathbf{x}, t) > 0$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$;
4. $\int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 1$ für $t > 0$;
5. Für jedes $\delta > 0$ gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{|\mathbf{x}| \geq \delta} K(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Beweis

1. Aus der Formel für $K(\mathbf{x}, t)$ ist ersichtlich, dass K unendlich oft differenzierbar für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$ ist.
2. Beachte, dass $K(\mathbf{x}, t)$ eine radialsymmetrische Funktion ist:

$$K(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-r^2/4t}, \quad r = |\mathbf{x}|.$$

Aus der Formel

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r$$

für den Laplace-Operator für radialsymmetrische Funktionen in n Dimensionen finden wir, dass

$$K_t = \Delta K$$

für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$ ist.

3. Aus der Formel für $K(\mathbf{x}, t)$ ist ersichtlich, dass $K(\mathbf{x}, t) > 0$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$ ist.

4. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x},t) \, d\mathbf{x} &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{x}|^2/4t} \, d\mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{y}|^2} \, d\mathbf{y} \\
 &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y_1^2 - \dots - y_n^2} \, dy_1 \dots dy_n \\
 &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \, dy}_{= \sqrt{\pi}} \right)^n \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

5. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_{|\mathbf{x}| \geq \delta} K(\mathbf{x},t) \, d\mathbf{x} &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{|\mathbf{x}| \geq \delta} e^{-|\mathbf{x}|^2/4t} \, d\mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{|\mathbf{y}| \geq \frac{\delta}{2\sqrt{t}}} e^{-|\mathbf{y}|^2} \, d\mathbf{y} \\
 &\rightarrow 0
 \end{aligned}$$

für $t \rightarrow 0$. (Der letzte Schritt folgt daraus, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{x}| \geq R} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$$

für jede über \mathbb{R}^n integrierbare Funktion f ist.)

□

Satz

Es sei $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ (d.h. g sei stetig und beschränkt auf \mathbb{R}^n).

Die Funktion

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y},t)g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

wobei $K(\mathbf{x},t)$ der Gaußsche Kern ist, löst die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

mit Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = g, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis

Es gilt:

$$u_t - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(K_t(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) - \Delta K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t))}_{= 0} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0$$

Die Differentiation unter dem Integral ist gültig für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [\delta, \infty)$ für jedes $\delta > 0$. Es gilt also $u_t - \Delta u = 0$ für $t \in [\delta, \infty)$, $\delta > 0$ und daher für alle $t > 0$.

Es bleibt zu zeigen, dass u die Anfangsbedingung

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z} \\ t \downarrow 0}} u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{z})$$

erfüllt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren $\delta, \Delta > 0$, so dass

$$|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta, t < \Delta \quad \Rightarrow \quad |u(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{z})| < \varepsilon.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta, \Delta > 0$ wie folgt:

- Da g stetig ist, existiert $\delta > 0$, so dass

$$|\mathbf{y} - \mathbf{z}| < 2\delta \quad \Rightarrow \quad |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

- Da

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} = 0$$

ist, existiert $\Delta > 0$, so dass

$$t < \Delta \quad \Rightarrow \quad \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} < \frac{\varepsilon}{4M},$$

wobei

$$M = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |g(\mathbf{x})|.$$

Für $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta$, $t < \Delta$ gilt nun

$$\begin{aligned}
 & |u(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{z})| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - g(\mathbf{z}) \right| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y}}_{=1} g(\mathbf{z}) \right| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) (g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})) \, d\mathbf{y} \right| \\
 &\leq \left| \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) (g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})) \, d\mathbf{y} \right| + \left| \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) (g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})) \, d\mathbf{y} \right| \\
 &\leq 2M \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} + \sup_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta} |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})| \underbrace{\int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y}}_{\leq 1} \\
 &\leq 2M \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} + \sup_{|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < 2\delta} |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})| \\
 &\quad \text{(denn } |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta, |\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta \Rightarrow |\mathbf{y} - \mathbf{z}| < 2\delta) \\
 &\leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \varepsilon.
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung

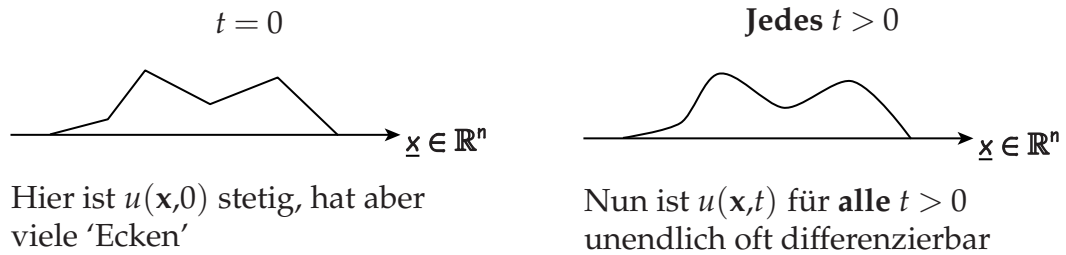
Die Funktion

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

ist unendlich oft differenzierbar für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Wir können nämlich beliebig oft unter dem Integral differenzieren:

$$\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \partial_t^\beta u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \partial_t^\beta K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Dies zeigt, dass der Anfangswert **sofort ausgeglättet** wird:



Notation

1. Die Kombination

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} u_1(\mathbf{x} - \mathbf{y})u_2(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

zweier Funktionen u_1 und u_2 heißt **Faltung** von u_1 und u_2 und wird oft als $u_1 * u_2$ geschrieben.

Unsere Lösung der Wärmeleitungsgleichung im n -dimensionalen Raum ist also die Faltung des Gaußschen Kerns mit dem Anfangswert g .

2. Die Funktion

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} \, ds$$

heißt **Gaußsche Fehlerfunktion**. Es gilt:

- $\operatorname{erf}(0) = 0$;
- $\operatorname{erf}(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty$;
- $\operatorname{erf}'(x) > 0$ für alle $x > 0$;
- $K(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4t}} \right) \right)$.

Üblicherweise existiert keine explizite Formel für die Lösung der Wärmeleitungsgleichung im n -dimensionalen Raum. Es gibt aber Anfangswerte g , für die $K * g$ durch die Fehlerfunktion ausgedrückt werden kann.

Satz

Es sei $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert eine **eindeutige** Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u|_{t=0} &= g, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

die polynomial mit der Zeit wächst, d.h.

$$|u(\mathbf{x}, t)| \leq M(1 + t^N)$$

für irgendwelche Konstanten $M, N \geq 0$. Diese Lösung ist $u = K * g$, wobei K der Gaußsche Kern ist.

Beweis

Wir wissen schon, dass $u = K * g$ das Anfangswertproblem löst. Sie ist außerdem beschränkt, da

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x}, t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} |g(\mathbf{y})| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y}}_{= 1} \end{aligned}$$

ist, und erfüllt daher das Kriterium von polynomialem Wachstum mit der Zeit.

Es seien nun u_1 und u_2 zwei Lösungen des Anfangswertproblems, die polynomial mit der Zeit wachsen. Die Differenz $w = u_1 - u_2$ erfüllt die Gleichungen

$$\begin{aligned} w_t &= \Delta w, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ w|_{t=0} &= 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

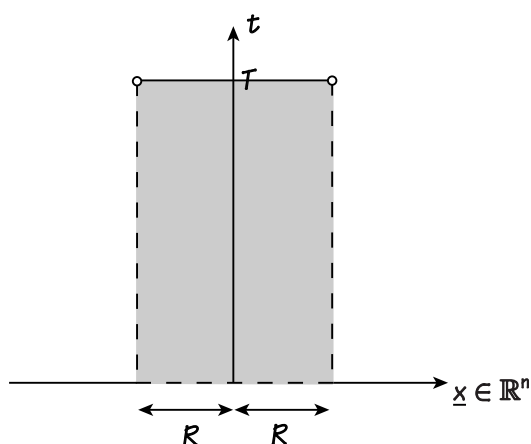
und wächst polynomial mit der Zeit: Es existieren Konstante $M, N \geq 0$, so dass

$$|w(\mathbf{x}, t)| \leq M(1 + t^N)$$

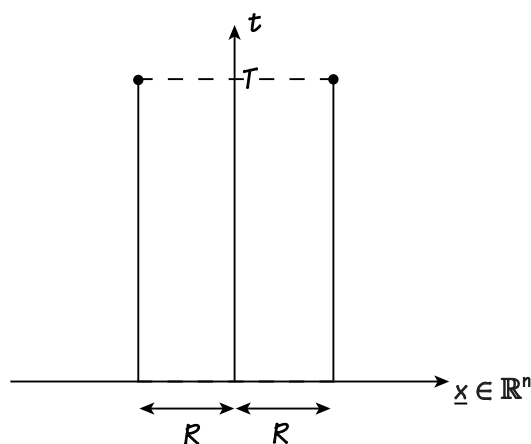
ist.

Wähle $R, T > 0$ und betrachte die Menge

$$Q_{R,T} = \{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x}| < R, t \in (0, T]\} :$$



$Q_{R,T}$ besteht aus dem Inneren und 'Deckel' des Zylinders



$\partial' Q_{R,T}$ besteht aus dem Mantel und 'Boden' des Zylinders

Wir beweisen, dass

$$|w(\mathbf{x}, t)| \leq \varepsilon, \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_{R,T}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ ist. Es folgt, dass $w = 0$ auf $\overline{Q}_{R,T}$ ist. Da R und T beliebig wählbar sind, verschwindet w überall, so dass $u_1 = u_2$ ist.

Betrachte die Funktion

$$v_\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu}{\left(1 - \frac{t}{2T}\right)^{n/2}} \exp\left(\frac{|\mathbf{x}|^2}{8T\left(1 - \frac{t}{2T}\right)}\right)$$

und wähle $\mu > 0$, so dass

$$v_\mu(\mathbf{x}, t) \leq \varepsilon, \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_{R,T}.$$

Beachte: μ hängt von R, T und ε ab.

Eine einfache Berechnung zeigt, dass

$$\partial_t v_\mu = \Delta v_\mu, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \in (0, T]$$

und

$$\begin{aligned} v_\mu(\mathbf{x}, 0) &\geq 0 \\ &= w(\mathbf{x}, 0) \end{aligned}$$

Für \mathbf{x} mit $|\mathbf{x}| = S$ und $t \in (0, T]$ gilt

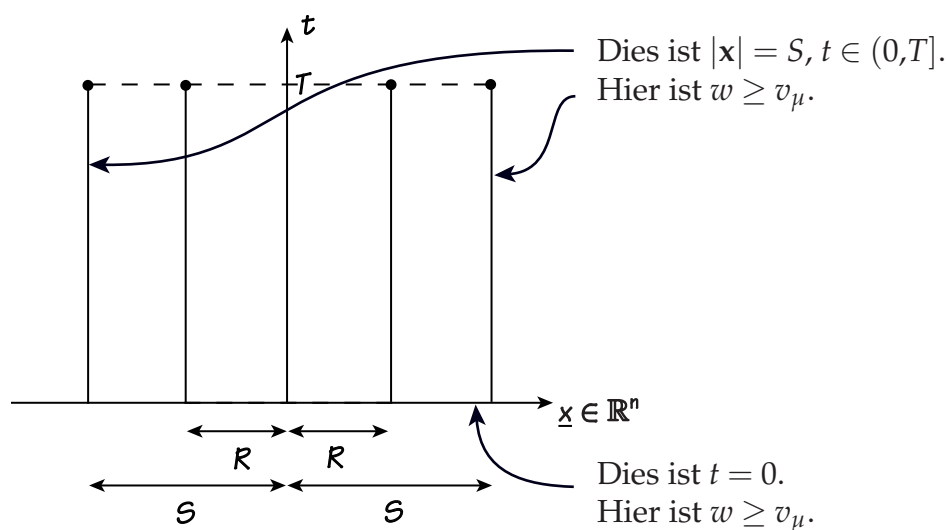
$$\begin{aligned} v_\mu(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu}{\left(1 - \frac{t}{2T}\right)^{n/2}} \exp\left(\frac{S^2}{8T\left(1 - \frac{t}{2T}\right)}\right) \\ &\geq \mu \exp\left(\frac{S^2}{8T}\right) \quad \left(\text{denn } 1 - \frac{t}{2T} < 1\right) \\ &\geq M(1 + t^N) \end{aligned}$$

für hinreichend große Werte von S (abhängig von R, T und ε). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $S > R$ ist. Daher ist

$$\begin{aligned} v_\mu(\mathbf{x}, t) &\geq M(1 + t^N) \\ &\geq w(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

für $|\mathbf{x}| = S$.

Betrachte nun die Menge $Q_{S,T}$:



Es gilt also

$$w(\mathbf{x}, t) \leq v_\mu(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial' Q_{S,T}$$

und aus dem Vergleichsprinzip folgt

$$w(\mathbf{x}, t) \leq v_\mu(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_{S,T}.$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}, t) &\leq v_\mu(\mathbf{x}, t) \\ &\leq \varepsilon, \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_{R,T}, \end{aligned}$$

da $\overline{Q}_{R,T} \subset \overline{Q}_{S,T}$ ist.

Wir wiederholen nun dieses Argument mit $-w$ an Stelle von w , um die Ungleichung

$$w(\mathbf{x},t) \geq -\varepsilon \quad (\mathbf{x},t) \in \overline{Q}_{R,T}$$

herzuleiten. Insgesamt haben wir also die gewünschte Abschätzung

$$|w(\mathbf{x},t)| \leq \varepsilon, \quad (\mathbf{x},t) \in \overline{Q}_{R,T}.$$

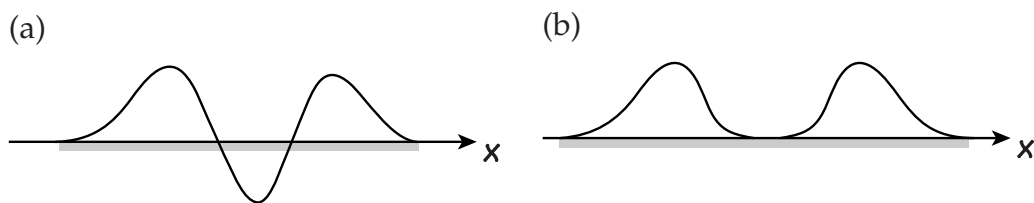
□

5 Distributionen, Fundamentallösungen und Greensche Funktionen

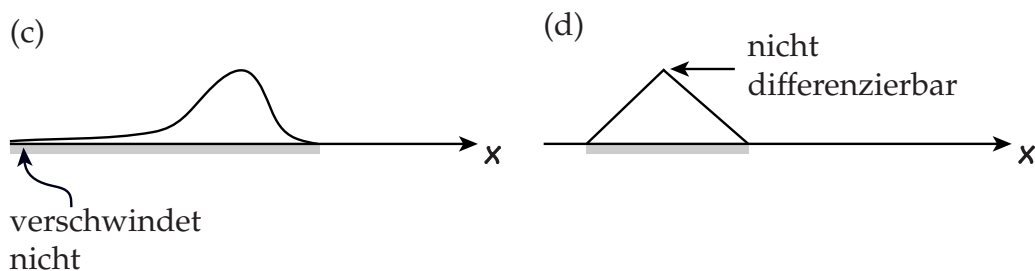
5.1 Eindimensionale Distributionen

Definitionen

1. Eine (reelle) **Testfunktion** ist eine reellwertige, unendlich oft differenzierbare Funktion, die außerhalb eines beschränkten Intervalls verschwindet.



(a) und (b) sind Testfunktionen



(c) und (d) sind keine Testfunktionen

Die markierte Region ist der **Träger** der jeweiligen Funktion, d.h. das kleinste abgeschlossene Intervall, außerhalb dessen die Funktion verschwindet. Wir bezeichnen den Träger einer Funktion ϕ mit $\text{supp } \phi$.

2. Wir bezeichnen die Menge aller Testfunktionen mit $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
3. Eine Folge $\{\phi_n\}$ von Testfunktionen **konvergiert** gegen die Testfunktion ϕ , falls ϕ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ und ϕ außerhalb eines gemeinsamen beschränkten Intervalls I verschwinden und ϕ_n und alle Ableitungen von ϕ_n gegen ϕ bzw. die entsprechenden Ableitungen von ϕ gleichmäßig auf I konvergieren.

Definitionen

Eine (reelle) **Distribution** f ist eine Regel, die jeder Testfunktion eine reelle Zahl zuordnet, d.h. eine Abbildung $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Die reelle Zahl, die f der Testfunktion ϕ zuordnet, wird mit (f, ϕ) bezeichnet, und wir setzen die folgenden Eigenschaften von f aus:

- **Linearität:**

$$(f, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha(f, \phi_1) + \beta(f, \phi_2)$$

für alle Testfunktionen ϕ_1, ϕ_2 und alle reellen Zahlen α, β ;

- **Stetigkeit:**

$$\phi_n \rightarrow \phi \Rightarrow (f, \phi_n) \rightarrow (f, \phi)$$

Wir bezeichnen die Menge der Distributionen mit $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Beispiele

1. Eine beliebige beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert eine Distribution

$$(f, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) dx.$$

2. Die **Diracsche Delta-Funktion** ist die durch die Formel

$$(\delta, \phi) := \phi(0)$$

definierte Distribution.

Definition

Die **Ableitung** einer Distribution f ist die durch die Formel

$$(f', \phi) := -(f, \phi')$$

definierte Distribution.

Höhere Ableitungen werden rekursiv definiert, so dass die Distribution $f^{(n)}$ durch die Formel

$$(f^{(n)}, \phi) = (-1)^n (f, \phi^{(n)})$$

definiert ist.

Bemerkung

Alle Distributionen sind unendlich oft differenzierbar.

Beispiele

1. Es sei $f \in C_b^1(\mathbb{R})$. Dann definieren f und die gewöhnliche Ableitung f' die Distributionen

$$(f, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) dx,$$

$$(f', \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x) dx.$$

Definitionsgemäß ist die Ableitung der Distribution (f, \cdot) die durch die Formel

$$(f', \phi) := - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x) dx \quad (\text{partielle Integration})$$

definierte Distribution (f', \cdot) , so dass die zwei Definitionen von f' miteinander übereinstimmen.

2. Betrachte die **Heaviside-Funktion**

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

die die Distribution

$$(H, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\phi(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} \phi(x) dx$$

definiert. Die Rechnung

$$(H', \phi) = -(H, \phi')$$

$$= - \int_0^{\infty} \phi'(x) dx$$

$$= \phi(0)$$

$$= (\delta, \phi)$$

zeigt, dass die Ableitung von H im Sinne der Distributionen die Diracsche Delta-Funktion ist.

Definition

Es sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung und f eine Distribution. Es gelte

$$(f, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\phi(x) dx$$

für alle Testfunktionen ϕ , deren Träger in einem Intervall I liegt.

Dann schreiben wir

$$f = h(x), \quad x \in I.$$

Beispiel

Es gelten

$$\delta = 0, \quad -\infty < x < 0$$

und

$$\delta = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

denn

$$\begin{aligned} (\delta, \phi) &= \phi(0) \\ &\swarrow \\ &= 0, \quad \text{falls } \text{supp } \phi \subset (-\infty, 0) \text{ oder } \text{supp } \phi \subset (0, \infty). \end{aligned}$$

Definition

Eine Folge $\{f_n\}$ von Distributionen **konvergiert** gegen eine Distribution f , falls

$$(f_n, \phi) \rightarrow (f, \phi) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

für alle Testfunktionen ϕ .

Beispiele

1. Es sei $\{f_n\}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gegen eine stetige Funktion f gleichmäßig konvergiert. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\phi(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) dx \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

für alle Testfunktionen ϕ . Die Folge der durch die Funktionen f_n definierten Distributionen konvergiert also gegen die durch die Funktion f definierte Distribution.

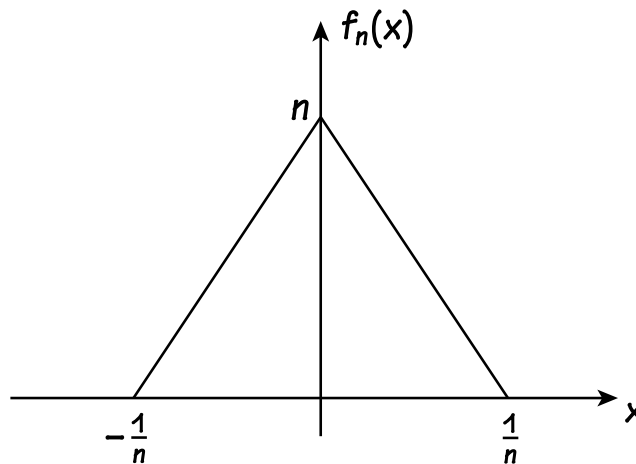
2. Betrachte die Funktion

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{1}{n}, \\ n^2x + n, & -\frac{1}{n} \leq x \leq 0, \\ -n^2x + n, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & x \geq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

die die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx = 1$$

hat:



Es gilt $f_n \rightarrow \delta$ im Sinne der Distributionen, denn

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \phi(x) \, dx - (\delta, \phi) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \phi(x) \, dx - \phi(0) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \phi(x) \, dx - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \, dx}_{=1} \phi(0) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) (\phi(x) - \phi(0)) \, dx
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) (\phi(x) - \phi(0)) \, dx \right| \\
 & \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) |\phi(x) - \phi(0)| \, dx \\
 & \leq \sup_{x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} |\phi(x) - \phi(0)| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) \, dx \\
 & = \sup_{x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} |\phi(x) - \phi(0)| \\
 & \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$, weil ϕ stetig im Nullpunkt ist.

Bemerkung

Komplexwertige Testfunktionen und Distributionen werden analog zu reellwertigen Distributionen definiert.

Definitionen

1. Eine **Schwartzfunktion** ϕ ist eine unendlich oft differenzierbare, reell- oder komplexwertige Funktionen mit der Eigenschaft, dass

$$|x|^k |\phi^{(n)}(x)|$$

für alle $k, n = 0, 1, 2, \dots$ beschränkt ist.

Die Menge aller Schwartzfunktionen heißt **Schwartz-Raum** und wird mit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ bezeichnet. Konvergenz in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ wird analog zur Konvergenz in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ definiert.

2. Eine **temperierte Distribution** f ist eine lineare, stetige Abbildung $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ oder $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$. Wir bezeichnen das Bild der Schwartzfunktion ϕ unter der temperierten Distribution f mit (f, ϕ) .

Konvergenz und Abbildungen temperierter Distributionen werden analog zu diesen Begriffen für gewöhnliche Distributionen definiert.

Bemerkungen

1. Wichtige Beispiele für temperierte Distributionen sind

- die Distributionen

$$(f, \phi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) dx,$$

die durch beschränkte Funktionen f definiert sind;

- die Diracsche Delta-Funktion

$$(\delta, \phi) := \phi(0).$$

2. Jede temperierte Distribution ist auch eine gewöhnliche Distribution, denn $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
3. Es sei ϕ eine Schwartzfunktion und p ein Polynom. Dann sind $\phi^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ sowie $p\phi$ ebenfalls Schwartzfunktionen.

Der Hauptvorteil von temperierten Distributionen gegenüber gewöhnlichen Distributionen ist, dass man ihre Fourier-Transformierten definieren kann.

Lemma

Es sei $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dann sind die Fourier-Transformierte

$$\hat{\phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{ikx} dx$$

und inverse Fourier-Transformierte

$$\check{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{-ikx} dk$$

von ϕ ebenfalls Schwartzfunktionen.

Beweis

Die Formel

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx$$

zeigt, dass die Fourier-Transformierte \hat{g} einer integrierbaren Funktion g stetig und beschränkt ist. Dies gilt insbesondere für Schwartzfunktionen.

Es sei ϕ eine Schwartzfunktion. Aus den Formeln

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^{(n)}(k) &= \mathcal{F}[(ix)^n \phi(x)], \\ (ik)^m \hat{\phi}(k) &= \mathcal{F}[\phi^{(m)}(x)] \end{aligned}$$

folgt

$$(ik)^m \hat{\phi}^{(n)}(k) = \mathcal{F}\left[\underbrace{\frac{d^m}{dx^m} \left((ix)^n \phi(x) \right)}_{\text{Schwartzfunktion}}\right], \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Dies ist eine Schwartzfunktion
und ist daher integrierbar

Mit $m = 0$ zeigt diese Formel, dass $\hat{\phi}^{(n)}$ für $n = 1, 2, \dots$ existiert, so dass $\hat{\phi}$ unendlich oft differenzierbar ist. Ferner zeigt sie, dass

$$|k|^m |\hat{\phi}(k)|$$

für alle $m, n = 0, 1, 2, \dots$ beschränkt ist.

Dasselbe Argument liefert das Ergebnis für $\check{\phi}$. □

Definition

Es sei f eine temperierte Distribution. Die **Fourier-Transformierte** \hat{f} von f ist die durch die Formel

$$(\hat{f}, \phi) = (f, \hat{\phi})$$

definierte temperierte Distribution.

Beispiele

1. Es sei f eine integrierbare Funktion, so dass \hat{f} im klassischen Sinne existiert und eine stetige, beschränkte Funktion definiert. Wir können also entsprechende temperierte Distributionen durch die üblichen Formel

$$(f, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(x) dx,$$

$$(\hat{f}, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \phi(x) dx$$

definieren.

Definitionsgemäß ist die Fourier-Transformierte der temperierten Distribution (f, \cdot) die durch die Formel

$$\begin{aligned} (\hat{f}, \phi) &:= (f, \hat{\phi}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(k) \hat{\phi}(k) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{ikx} dx dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} dk \phi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \phi(x) dx \end{aligned}$$

definierte Distribution (\hat{f}, \cdot) . Die zwei Definitionen von \hat{f} stimmen also miteinander überein.

2. Es gilt

$$\begin{aligned} (\hat{\delta}, \phi) &= (\delta, \hat{\phi}) \\ &= \hat{\phi}(0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{ikx} dk \Big|_{x=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) dk \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \phi \right). \end{aligned}$$

die durch die konstante Funktion $1/\sqrt{2\pi}$ definierte temperierte Distribution

Es ist also

$$\hat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

im Sinne der Distributionen.

5.2 Distributionen in höheren Dimensionen

Die Definitionen von (temperierten) Distributionen lassen sich leicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

Definitionen

1. Eine **Testfunktion** $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine unendlich oft differenzierbare Funktion, die außerhalb einer hinreichend großen im Ursprung zentrierten Kugel verschwindet. Die Menge aller Testfunktionen wird mit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.
2. Eine **Schwartzfunktion** $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine unendlich oft differenzierbare Funktionen mit der Eigenschaft, dass

$$|x|^k |\partial_{x_1}^{m_1} \dots \partial_{x_n}^{m_n} \phi(x)|$$

für alle $k, m_1, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots$ beschränkt ist. Die Menge aller Schwartzfunktionen wird mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

3. Eine **n -dimensionale Distribution** ist eine lineare, stetige Abbildung $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. Die Menge aller n -dimensionalen Distributionen wird mit $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.
4. Eine **n -dimensionale temperierte Distribution** ist eine lineare, stetige Abbildung $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. Die Menge aller n -dimensionalen temperierten Distributionen wird mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

Alles Weitere wird ebenfalls analog zum eindimensionalen Fall eingeführt:

- Eine lokal integrierbare Funktion $f(x)$ wird mit einer n -dimensionalen Distribution durch die Formel

$$(f, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \phi(x) dx$$

identifiziert.

- Die partiellen Ableitungen einer n -dimensionalen Distribution f werden durch die Formel

$$(\partial_{x_1}^{m_1} \dots \partial_{x_n}^{m_n} f, \phi) := (-1)^{m_1 + \dots + m_n} (f, \partial_{x_1}^{m_1} \dots \partial_{x_n}^{m_n} \phi), \quad m_1, \dots, m_n = 0, 1, 2, \dots$$

definiert.

- Die Fourier-Transformierte einer n -dimensionalen temperierten Distribution f wird durch die Formel

$$(\hat{f}, \phi) := (f, \hat{\phi})$$

definiert, wobei die Fourier-Transformierte

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

und inverse Fourier-Transformierte

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}$$

einer Schwartzfunktion ϕ ebenfalls Schwartzfunktionen sind.

- Die n -dimensionale Diracsche Delta-Funktion wird durch die Formel

$$(\delta, \phi) := \phi(\mathbf{0})$$

definiert.

Definitionen (Weitere Diracsche Delta-Funktionen)

- Es sei \mathbf{x}_0 ein konstanter n -dimensionaler Vektor. Die n -dimensionale Distribution $\delta_{\mathbf{x}_0}$ wird durch die Formel

$$(\delta_{\mathbf{x}_0}, \phi) = \phi(\mathbf{x}_0)$$

definiert, wobei δ_0 auf δ abgekürzt wird.

- Es seien \mathbf{x}_0 ein konstanter n -dimensionaler Vektor und a eine positive reelle Zahl. Die Distribution $\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| - a)$ wird durch die Formel

$$(\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| - a), \phi) = \underbrace{\int_{\partial B_a(\mathbf{x}_0)} \phi(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x})}_{\text{Das Integral von } \phi \text{ über die Oberfläche einer Kugel mit Mittelpunkt } \mathbf{x}_0 \text{ und Radius } a}$$

definiert.

Oft missbraucht man diese Notation und schreibt z.B.

$$\delta(a^2 - b^2 r^2)$$

für

$$\delta\left(|\mathbf{x}| - \frac{a}{b}\right).$$

Definition (Direktes Produkt)

Es seien $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$ bzw. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p)$ und $g(\mathbf{y}) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^q)$ bzw. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^q)$. Das **direkte Produkt** $f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$ ist die durch die Formel

$$(f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (f(\mathbf{x}), (g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})))$$

definierte $(p + q)$ -dimensionale (temperierte) Distribution.

Mit anderen Worten darf man Distributionen, die von verschiedenen Koordinaten abhängen, miteinander multiplizieren.

Beispiele

1. Es seien $f(\mathbf{x})$ und $g(\mathbf{y})$ lokal integrierbare Funktionen. Dann gilt

$$\begin{aligned} (f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) &= \int_{\mathbb{R}^p} f(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^q} g(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

2. Es seien $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^q$ konstante Vektoren. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\delta_{\mathbf{x}_0} \delta_{\mathbf{y}_0}, \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) &= (\delta_{\mathbf{x}_0}, \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)) \\ &= \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ &= (\delta_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}, \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \end{aligned}$$

Weitere Operationen auf Distributionen

1. Es seien $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion bzw. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine unendlich oft differenzier-

bare Funktion mit der Eigenschaft, dass $m\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist. Das **Produkt** $m\phi$ ist die durch die Formel

$$(m\phi, \phi) := (f, m\phi)$$

definierte n -dimensionale (temperierte) Distribution.

(Im Falle, dass f eine lokal integrierbare Funktion ist, zeigt die Rechnung

$$(m\phi, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} (m(\mathbf{x})f(\mathbf{x}))\phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})(m(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = (f, m\phi),$$

dass diese Definition mit der üblichen Definition von Multiplikation übereinstimmt.)

2. Es seien $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Die **Koordinatenverschiebung** $\tau_{\mathbf{y}}f$ wird durch die Formel

$$(\tau_{\mathbf{y}}f, \phi) = (f, \tau_{-\mathbf{y}}\phi)$$

definiert.

(Im Falle, dass f eine lokal integrierbare Funktion ist, zeigt die Rechnung

$$(\tau_{\mathbf{y}}f, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} + \mathbf{y})\phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z})\phi(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{z} = (f, \tau_{-\mathbf{y}}\phi),$$

dass diese Definition mit der üblichen Definition von Koordinatenverschiebung übereinstimmt.)

3. Es seien $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Die **Faltung** $f * \phi$ ist die durch die Formel

$$(f * \phi)(\mathbf{x}_0) = (f, \phi(\mathbf{x}_0 - \cdot))$$

definierte Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

(Im Falle, dass f eine lokal integrierbare Funktion ist, zeigt die Rechnung

$$(f * \phi)(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = (f, \phi(\mathbf{x}_0 - \cdot)),$$

dass diese Definition mit der üblichen Definition von Faltung übereinstimmt.)

Bemerkung (Distributionen auf beschränkten und zylindrischen Gebieten)

- Wir können auch Distributionen auf einem beschränkten, offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren. In diesem Fall ist $\mathcal{D}(\Omega)$ die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, deren Träger Teilmenge von Ω ist.

- In einem Zylindergebiet $\mathbb{R}^p \times \Omega$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ ein beschränktes, offenes Gebiet ist, können wir Distributionen einführen, die nur in den ersten p Richtungen temperiert sind. Dazu betrachten wir unendlich oft differenzierbare Testfunktionen $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^p \times \Omega$ mit den folgenden Eigenschaften:
 - ϕ verschwindet in der Nähe von $\mathbb{R}^p \times \partial\Omega$;
 - $|\mathbf{x}^\alpha| |\partial_{x_1}^{m_1} \dots \partial_{x_p}^{m_p} \partial_{y_1}^{n_1} \dots \partial_{y_q}^{n_q} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$ ist beschränkt für alle $\alpha, m_1, \dots, m_p, n_1, \dots, n_q = 0, 1, 2, \dots$

5.3 Fundamentallösungen

Definition

Eine **Fundamentallösung** der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

im n -dimensionalen Raum ist eine Funktion $u_F : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$, die

- harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist;
- die Gleichung

$$\Delta u_F = \delta$$

im Sinne der Distributionen löst.

Bemerkungen

1. Die Funktion u_F ist nicht eindeutig bestimmt: Die Summe $u_F + u_H$, wobei u_H eine im ganzen Raum harmonische Funktion ist, ist ebenfalls eine Fundamentallösung für die Laplace-Gleichung.
2. Die zweite Bedingung besagt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_F(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{0})$$

für alle Testfunktionen $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist. Um diese Bedingung erfüllen zu können, muss u_F eine Singularität im Nullpunkt haben.

Beispiel

Finden Sie eine Fundamentallösung für die Laplace-Gleichung im dreidimensionalen Raum.

Lösung

Zunächst suchen wir eine radialsymmetrische Lösung $u = u(r)$ der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0,$$

denn solche Lösungen haben bekanntlich eine Singularität im Nullpunkt. Die Funktion u löst die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'' + \frac{2}{r}u'(r) = 0,$$

so dass

$$u(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}$$

für irgendwelche Konstante c_1 und c_2 ist. Wir setzen $c_1 = 0$, da Konstante überall harmonisch sind, und wählen c_2 , so dass

$$\Delta\left(\frac{c_2}{r}\right) = \delta$$

ist.

Es sei ϕ eine Testfunktion. Wähle M groß genug, so dass $\text{supp } \phi \subset B_M(\mathbf{0})$ ist. Dann gilt

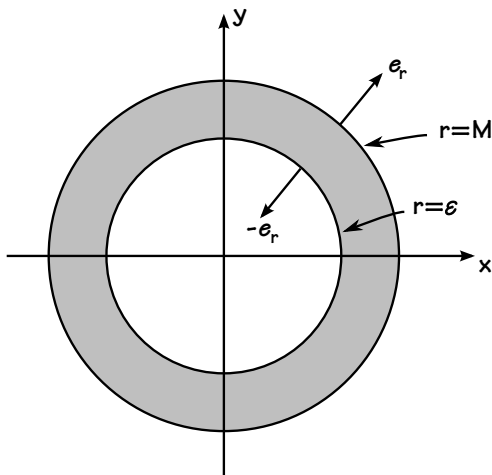
$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{r} \Delta \phi = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon \leq r \leq M} \frac{1}{r} \Delta \phi.$$

Aus dem zweiten Greenschen Integralsatz folgt

$$\int_{\varepsilon \leq r \leq M} \left(\frac{1}{r} \Delta \phi - \underbrace{\phi \Delta \left(\frac{1}{r} \right)}_{=0} \right) = \int_{\partial\{\varepsilon \leq r \leq M\}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right), \quad (1)$$

wobei n die äußere Einheitsnormale zum Rand des Gebiets $\{\varepsilon \leq r \leq M\}$ ist. Der Rand $\partial\{\varepsilon \leq r \leq M\}$ besteht aus den zwei Teilen $\{r = \varepsilon\}$ und $\{r = M\}$. Auf $\{r = M\}$ verschwindet ϕ mit sämtlichen Ableitungen, so dass die Randintegrale ebenfalls verschwinden, und auf $\{r = \varepsilon\}$ gilt $\partial_n = -\partial_r$. Aus Gleichung (1) folgt also

$$\int_{\varepsilon \leq r \leq M} \frac{1}{r} \Delta \phi = - \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \int_{r=\varepsilon} \phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right).$$



- Die äußere Einheitsnormale an $\{r = M\}$ ist \mathbf{e}_r , so dass $\partial_n = \partial_r$ dort.
- Die äußere Einheitsnormale an $\{r = \varepsilon\}$ ist $-\mathbf{e}_r$, so dass $\partial_n = -\partial_r$ dort.

Es gilt nun

$$\left| \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right| \leq 4\pi \varepsilon^2 \frac{1}{\varepsilon} \sup \left| \frac{\partial \phi}{\partial r} \right| = O(\varepsilon)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ und

$$\int_{r=\varepsilon} \phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{r=\varepsilon} \phi = -4\pi \bar{\phi}_\varepsilon \rightarrow -4\pi \phi(\mathbf{0})$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$, wobei

$$\bar{\phi}_\varepsilon = \frac{1}{4\pi \varepsilon^2} \int_{r=\varepsilon} \phi$$

der Mittelwert von ϕ über $\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$ ist. Es ist also

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{c_2}{r} \phi = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon \leq r \leq M} \frac{c_2}{r} \Delta \phi = -4\pi c_2 \phi(\mathbf{0}),$$

und daher wählen wir $c_2 = -1/4\pi$.

Die Funktion $u_F : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ mit

$$u_F(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$$

ist also eine Fundamentallösung für die Laplace-Gleichung im dreidimensionalen Raum. \square

Wir gehen nun **formal** vor, indem wir die Distribution $\delta_{\mathbf{x}_0}$ als echte Funktion betrachten. Insbesondere schreiben wir

$$(\delta_{\mathbf{x}_0}, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{x}_0)$$

und wenden die Greenschen Integralsätze auf $\delta_{\mathbf{x}_0}$ an. Außerdem nehmen wir an, dass alle Integrale verschwinden.

Satz

Die Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u = f, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

ist

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} u_{\text{F}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

wobei u_{F} eine Fundamentallösung der Laplace-Gleichung in \mathbb{R}^n ist.

Beweis (formal)

Betrachte die Gleichungen

$$\Delta u = f, \tag{1}$$

$$\Delta \tilde{u} = \delta_{\mathbf{x}_0}, \tag{2}$$

wobei $\tilde{u}(\mathbf{x}) = u_{\text{F}}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})$ ist.

Multipliziere (1) mit \tilde{u} , (2) mit u und integriere die Differenz über \mathbb{R}^n :

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{u} \Delta u - u \Delta \tilde{u})}_{=0} = \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{u} f - \delta_{\mathbf{x}_0} u)$$

(zweiter Greenscher Integralsatz)

Daraus folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u} f = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{\mathbf{x}_0} u,$$

d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_{\text{F}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = u(\mathbf{x}_0).$$

□

Das obige Argument suggeriert beispielsweise, dass

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

die eindeutige Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta u = f, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

ist. Das Argument ist aber nicht rigoros. Es liefert eher einen **Kandidaten** für die Lösung, und wir zeigen nun direkt, dass dieser Kandidat tatsächlich das Randwertproblem löst.

Lemma (Darstellungsformel)

Jede Funktion $u \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$ erfüllt die Gleichung

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \Delta_{\mathbf{y}} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Beweis

Es seien (r, θ, ϕ) im Punkt \mathbf{x} zentrierte Polarkoordinaten. Wähle $M > 0$ groß genug, Wähle M groß genug, so dass $\text{supp } u \subset B_M(\mathbf{x})$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \Delta_{\mathbf{y}} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} - \int_{\varepsilon \leq r \leq M} \frac{1}{4\pi r} \Delta u \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[- \int_{\varepsilon \leq r \leq M} \underbrace{\Delta \left(\frac{1}{4\pi r} \right)}_{=0} u + \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial r} - \int_{r=\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) u \right], \end{aligned}$$

und die angegebene Identität aus dieser Gleichung und den Rechnungen

$$\left| \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial r} \right| \leq 4\pi\varepsilon^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sup \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| = O(\varepsilon)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ und

$$\int_{r=\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = - \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{r=\varepsilon} u = -\bar{u}_\varepsilon \rightarrow -u(\mathbf{x})$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt, wobei

$$\bar{u}_\varepsilon = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{r=\varepsilon} u$$

der Mittelwert von u über $\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})$ ist. □

Korollar

Es sei $f \in C_0(\mathbb{R}^3)$ und $u \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$ erfülle die Gleichung

$$\Delta u = f, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Dann gilt

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Somit ist die **Eindeutigkeit** der Lösung der Poisson-Gleichung bewiesen: Falls u die Gleichung löst, ist u durch die obige Formel gegeben. Es bleibt nun, die **Existenz** einer Lösung zu zeigen. Zu diesem Zweck verifizieren wir, dass die obige Formel tatsächlich eine Lösung der Gleichung definiert. Dazu ist es erforderlich, die Regularitätsvoraussetzung an f zu stärken.

Lemma

Es sei $f \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$. Dann liegt die durch die Formel

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

definierte Funktion ebenfalls in $C_0^2(\mathbb{R}^3)$ und erfüllt die Poisson-Gleichung

$$\Delta u = f, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Beweis

Es gilt nun

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{s}|} f(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \, d\mathbf{s}$$

und daher

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^{j_1} \partial_{x_2}^{j_2} \partial_{x_3}^{j_3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{s}|} \partial_{x_1}^{j_1} \partial_{x_2}^{j_2} \partial_{x_3}^{j_3} f(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \, d\mathbf{s} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \partial_{y_1}^{j_1} \partial_{y_2}^{j_2} \partial_{y_3}^{j_3} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

für $j_1 + j_2 + j_3 = 1, 2$, so dass $u \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\Delta u = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Delta_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

ist.

Das Ergebnis folgt nun aus dieser Formel und der Darstellungsformel

$$f(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Delta_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

□

Bemerkung

Im obigen Argument ist es nicht notwendig, dass f einen kompakten Träger hat. Diese Voraussetzung kann dadurch ersetzt werden, dass f hinreichend schnell zur Konvergenz der Integrale abklingt.

5.4 Greensche Funktionen

Es seien Ω ein (teilweise) beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^n und $f \in C^2(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$. Eine **Greensche** Funktion für das Dirichletsche Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, & \mathbf{x} &\in \Omega, \\ u &= g, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega \end{aligned}$$

ist eine Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \Omega$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $G(\cdot, \mathbf{y})$ ist stetig für $\mathbf{x} \in \overline{\Omega} \setminus \{\mathbf{y}\}$;
- $G(\cdot, \mathbf{y})$ ist harmonisch für $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{y}\}$;
- $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ für $\mathbf{x} \in \partial\Omega$;
- $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ erfüllt

$$\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Greensche Funktionen spielen dieselbe Rolle für Probleme in einem Gebiet mit Rand wie Fundamentallösungen für Probleme in einem ganzen Raum. Wir gehen

auch analog mit ihnen um. Zunächst benutzen wir formale Argumente, um einen Kandidaten für die Lösung eines Randwertproblems zu finden. Dann verifizieren wir rigoros, dass dieser Kandidat tatsächlich eine Lösung ist.

Satz

Es sei Ω ein (teilweise) beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^n . Die Lösung des Dirichletschen Problems

$$\begin{aligned}\Delta u &= f, & \mathbf{x} &\in \Omega, \\ u &= g, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega\end{aligned}$$

ist durch die Formel

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

gegeben.

Beweis (formal)

Betrachte die Gleichungen

$$\Delta u = f, \tag{1}$$

$$\Delta G = \delta_{\mathbf{y}}. \tag{2}$$

Multipliziere (1) mit G , (2) mit u und integriere die Differenz über Ω :

$$\begin{aligned}\underbrace{\int_{\Omega} (G\Delta u - u\Delta G)}_{= \int_{\partial\Omega} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right)} &= \int_{\Omega} (Gf - \delta_{\mathbf{y}}u). \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) \\ &\text{(zweiter Greenscher Integralsatz)}\end{aligned}$$

Aus $G = 0$ und $u = g$ auf $\partial\Omega$ folgt also

$$\underbrace{\int_{\Omega} \delta_{\mathbf{y}}u}_{= u(\mathbf{y})} = \int_{\Omega} Gf + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n} g.$$

□

Durch solche formalen Argumente können wir auch einige Eigenschaften der Greenschen Funktionen herleiten.

Satz

Es sei Ω ein (teilweise) beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^n . Die Greensche Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ für das Dirichletsche Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, & \mathbf{x} &\in \Omega, \\ u &= g, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega \end{aligned}$$

ist eindeutig bestimmt und symmetrisch, d.h. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$.

Beweis (formal)

- Es seien G_1, G_2 Greensche Funktionen für das angegebene Randwertproblem, so dass

$$\begin{aligned} G_1 &= 0, & G_2 &= 0, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega, \\ \Delta G_1 &= \delta_{\mathbf{y}_1}, & \Delta G_2 &= \delta_{\mathbf{y}_2}, & &\text{in } \mathcal{D}'(\Omega). \end{aligned}$$

Dann erfüllt $G := G_1 - G_2$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} G &= 0, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega, \\ \Delta G &= 0, & \mathbf{x} &\in \Omega \end{aligned}$$

(die Singularitäten im Punkt \mathbf{y} haben sich gegenseitig aufgehoben). Die einzige Lösung dieses Randwertproblems ist bekanntlich $G = 0$ (siehe das Referat von Mai und Oberacker).

- Wähle $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \Omega$ und definiere $u_1(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1)$, $u_2(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$, so dass

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, & u_2 &= 0, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega, \\ \Delta u_1 &= \delta_{\mathbf{y}_1}, & \Delta u_2 &= \delta_{\mathbf{y}_2}, & &\text{in } \mathcal{D}'(\Omega). \end{aligned}$$

Aus dem zweiten Greenschen Integralsatz folgt

$$\int_{\Omega} (u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1) = \int_{\partial\Omega} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right)$$

und daher

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_1 \delta_{\mathbf{y}_2} - u_2 \delta_{\mathbf{y}_1}) &= 0 \\ \Rightarrow u_1(\mathbf{y}_2) - u_2(\mathbf{y}_1) &= 0 \\ \Rightarrow G(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1) - G(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) &= 0. \end{aligned}$$

□

Beispiel

Finden Sie die Greensche Funktion für das Dirichletsche Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= f(x, y), & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und geben Sie eine Formel für die Lösung dieses Randwertproblems an.

Lösung

Wir müssen $G(x, y; \xi, \eta)$ mit den folgenden Eigenschaften finden:

- G ist stetig auf $\{(x, y) : y \geq 0, (x, y) \neq (\xi, \eta)\}$;
- $G(x, 0; \xi, \eta) = 0$;
- $G(x, y; \xi, \eta)$ ist harmonisch in $\{(x, y) : y > 0, (x, y) \neq (\xi, \eta)\}$;
- $G(x, y; \xi, \eta)$ erfüllt

$$\Delta_{(x,y)} G = \delta_{(\xi,\eta)} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\{y > 0\}).$$

Beachte, dass $\frac{1}{2\pi} \log |(x, y)|$ eine Fundamentallösung für die Poisson-Gleichung im zweidimensionalen Raum ist. Damit gilt:

▪

$$G_1(x, y; \xi, \eta) := \frac{1}{2\pi} \log |(x, y) - (\xi, \eta)|$$

ist harmonisch in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (\xi,\eta)\}$ und erfüllt

$$\Delta_{(x,y)} G_1 = \delta_{(\xi,\eta)} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2);$$

▪

$$G_2(x,y;\xi,\eta) := \frac{1}{2\pi} \log |(x,y) - (\xi, -\eta)|$$

ist harmonisch in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (\xi, -\eta)\}$ und erfüllt

$$\Delta_{(x,y)} G_2 = \delta_{(\xi,-\eta)} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Die gesuchte Greensche Funktion ist

$$\begin{aligned} G(x,y;\xi,\eta) &= G_1(x,y;\xi,\eta) - G_2(x,y;\xi,\eta) \\ &= \frac{1}{4\pi} \log \left[\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} \right]: \end{aligned}$$

- Sie ist harmonisch in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (\eta,\xi), (\eta, -\xi)\}$ und insbesondere in $\{(x,y) : y > 0, (x,y) \neq (\xi,\eta)\}$;

- Sie erfüllt

$$\Delta_{(x,y)} G = \delta_{(\xi,\eta)} - \delta_{(\xi,-\eta)} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

und daher

$$\Delta_{(x,y)} G = \delta_{(\xi,\eta)} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\{y > 0\});$$

- Es gilt

$$G(x,0;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \log |(x,y) - (\xi,\eta)| \Big|_{y=0} - \frac{1}{2\pi} \log |(x,y) - (\xi, -\eta)| \Big|_{y=0} = 0.$$

Die Lösung des Randwertproblems ist

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} G(x,y;\xi,\eta) f(x,y) dy dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial y}(x,0;\xi,\eta) g(x) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \log \left[\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} \right] f(x,y) dy dx \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{(x-\xi)^2 + \eta^2} g(x) dx, \end{aligned}$$

denn auf $\{y = 0\}$ gilt $\partial_n = -\partial_y$. □

6 Harmonische Funktionen und die Perronsche Methode

6.1 Die Poissonsche Formel

Mit Hilfe Greenscher Funktionen stellt man fest, dass die eindeutige Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u = 0, \quad \mathbf{x} \in B_a(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$u = g, \quad \mathbf{x} \in \partial B_a(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n \quad (2)$$

durch die **Poissonsche Formel**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n} \int_{|\mathbf{y}|=a} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y} \quad (3)$$

gegeben ist, wobei ω_n der Rauminhalt der Einheitskugel in \mathbb{R}^n ist (siehe das Referat von Jakob und Weikert).

Wir verifizieren nun rigoros, dass (3) eine Lösung des Randwertproblems (1), (2) definiert.

Lemma

Es gilt

$$\Delta \left(\frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \right) = 0$$

für $|\mathbf{x}| < a$ und $|\mathbf{y}| = a$.

Beweis

Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \right) &= \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \Delta (a^2 - |\mathbf{x}|^2) + (a^2 - |\mathbf{x}|^2) \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \right) \\ &\quad + 2 \nabla (a^2 - |\mathbf{x}|^2) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \right), \end{aligned}$$

und die rechte Seite lässt sich durch die folgenden Rechnungen auswerten.

- Mit $r = |\mathbf{x}|$ gilt

$$\Delta(a^2 - |\mathbf{x}|^2) = \frac{d^2}{dr^2}(a^2 - r^2) + \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr}(a^2 - r^2) = -2n$$

und

$$\nabla(a^2 - |\mathbf{x}|^2) = \frac{d}{dr}(a^2 - r^2) \nabla r = -2\mathbf{x},$$

denn

$$\nabla(|\mathbf{x}|) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

- Mit $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ gilt

$$\Delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n}) = \frac{d^2}{dR^2}(R^{-n}) + \frac{n-1}{R} \frac{d}{dR}(R^{-n}) = 2nR^{-n-2} = 2n|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n-2}$$

und

$$\nabla(R^{-n}) = \frac{d}{dR}(R^{-n}) \nabla R = -nR^{-n-2}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -n|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n-2}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

denn

$$\nabla(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}\right) &= -2n|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n} + 2n(a^2 - |\mathbf{x}|^2)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n-2} \\ &\quad + 4n|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n-2} \underbrace{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}_{|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{y}|^2\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Korollar

Es sei $g \in C(\partial B_a(\mathbf{0}))$. Die durch die Poissonsche Formel (3) definierte Funktion u ist harmonisch in $B_a(\mathbf{0})$.

Beweis

Es gilt

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \frac{1}{an\omega_n} \int_{|\mathbf{y}|=a} \Delta \left(\frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \right) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0.$$

Die Differentiation unter dem Integral ist gültig für $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{0})$ für jedes $\delta \in (0, a)$. Es gilt also $\Delta u = 0$ für $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{0})$, $\delta \in (0, a)$ und daher für $\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{0})$. \square

Lemma

Es sei

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}, \quad |\mathbf{x}| < a, |\mathbf{y}| = a.$$

Dann gilt

$$\int_{|\mathbf{y}|=a} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 1.$$

Beweis

Die Funktion

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{y}|=a} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|=a} \frac{1}{|\mathbf{z}|^n} \, d\mathbf{z}$$

ist radialsymmetrisch und aus dem obigen Korollar mit $g = 1$ folgt, dass sie auch harmonisch in $B_a(\mathbf{0})$ ist. Die einzigen in $B_a(\mathbf{0})$ harmonischen radialsymmetrischen Funktionen sind aber die Konstanten. Damit ist

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \phi(\mathbf{0}) \\ &= \frac{a}{n\omega_n} \int_{|\mathbf{z}|=a} \frac{1}{|\mathbf{z}|^n} \, d\mathbf{z} \\ &= \frac{1}{n\omega_n a^{n-1}} \underbrace{\int_{|\mathbf{z}|=a} d\mathbf{z}}_{= n\omega_n a^{n-1}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

\square

Satz

Es sei $g \in C(\partial B_a(\mathbf{0}))$. Die durch die Poissonsche Formel (3) definierte Funktion u erfüllt die Randbedingung (2).

Beweis

Wähle $\mathbf{z} \in \partial B_a(\mathbf{0})$. Wir zeigen, dass

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z} \\ |\mathbf{x}| < a}} u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{z})$$

ist: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren δ , so dass

$$|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta, |\mathbf{x}| < a \quad \Rightarrow \quad |u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{z})| < \varepsilon.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir δ wie folgt:

- Da g stetig ist, existiert $\delta_1 > 0$, so dass

$$|\mathbf{y} - \mathbf{z}| < 2\delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

- Da

$$\int_{\substack{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| \geq 2\delta_1 \\ |\mathbf{y}|=a}} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n\delta_1^n} d\mathbf{y} \rightarrow 0$$

für $|\mathbf{x}| \rightarrow a$ und insbesondere für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$, existiert $\delta_2 > 0$, so dass

$$|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \int_{\substack{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| \geq 2\delta_1 \\ |\mathbf{y}|=a}} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n\delta_1^n} d\mathbf{y} < \frac{\varepsilon}{4M},$$

wobei

$$M = \sup_{\mathbf{x} \in \partial B_a(\mathbf{0})} |g(\mathbf{x})|.$$

- Wir setzen $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Für $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta$ gilt nun

$$\begin{aligned}
& |u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{z})| \\
&= \left| \int_{|\mathbf{y}|=a} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - g(\mathbf{z}) \right| \\
&= \left| \int_{|\mathbf{y}|=a} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \underbrace{\int_{|\mathbf{y}|=a} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}}_{=1} g(\mathbf{z}) \right| \\
&= \left| \int_{|\mathbf{y}|=a} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})) \, d\mathbf{y} \right| \\
&\leq \left| \int_{\substack{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| \geq 2\delta_1 \\ |\mathbf{y}|=a}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})) \, d\mathbf{y} \right| + \left| \int_{\substack{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| < 2\delta_1 \\ |\mathbf{y}|=a}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})) \, d\mathbf{y} \right| \\
&\leq 2M \int_{\substack{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| \geq 2\delta_1 \\ |\mathbf{y}|=a}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \sup_{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| < 2\delta_1} |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})| \underbrace{\int_{\substack{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| < 2\delta_1 \\ |\mathbf{y}|=a}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}}_{\leq 1} \\
&\leq 2M \int_{\substack{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| \geq 2\delta_1 \\ |\mathbf{y}|=a}} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n \delta_1^n} \, d\mathbf{y} + \sup_{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| < 2\delta_1} |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{z})| \\
&\quad \text{(denn } |\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta_1, |\mathbf{y} - \mathbf{z}| \geq 2\delta_1 \Rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \delta_1) \\
&\leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

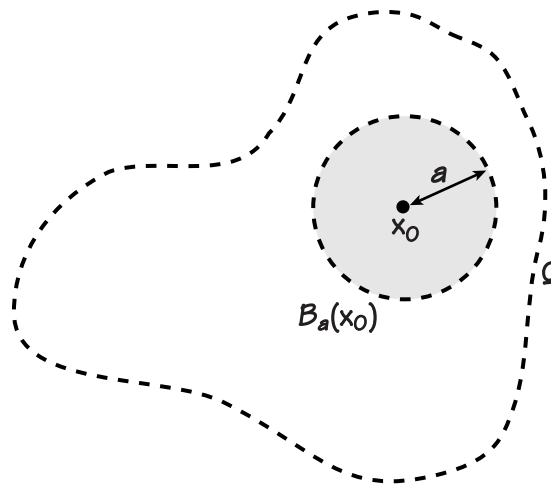
□

Satz

Es sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$.

Beweis

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Da Ω offen ist, existiert $a > 0$, so dass $\overline{B}_a(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ ist:



Führe nun ein neues kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung im Punkt \mathbf{x}_0 ein, so dass $B_a(\mathbf{x}_0)$ in $B_a(\mathbf{0})$ übergeht. Da $u \in C^2(\overline{B}_a(\mathbf{0}))$ und u harmonisch in $B_a(\mathbf{0})$ ist, folgt aus der Poissonschen Formel, dass

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n} \int_{|\mathbf{y}|=a} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}, \quad |\mathbf{x}| < a$$

ist. Es gilt

$$\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(\mathbf{x}) = \frac{1}{an\omega_n} \int_{|\mathbf{y}|=a} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \left(\frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \right) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0, 1, \dots,$$

wobei die Differentiation unter dem Integral für $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{0})$ für jedes $\delta \in (0, a)$ gültig ist.

Insbesondere existieren alle Ableitungen von u im Punkte $\mathbf{0}$, also im Punkte \mathbf{x}_0 im ursprünglichen Koordinatensystem. Da \mathbf{x}_0 ein beliebiger Punkt in Ω ist, liegt nun u in $C^\infty(\Omega)$. \square

6.2 Sub-, super- und harmonische Funktionen

Lemma (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen)

Es sei $u \in C^2(B_a(\mathbf{x}_0)) \cap C(\overline{B}_a(\mathbf{x}_0))$ harmonisch in $B_a(\mathbf{x}_0)$. Dann gilt

$$u(\mathbf{x}_0) = \overline{u}_a(\mathbf{x}_0),$$

wobei

$$\overline{u}_a(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\underbrace{n\omega_n a^{n-1}}_{\substack{\text{Flächeninhalt} \\ \text{von } \partial B_a(\mathbf{x}_0)}}} \int_{\partial B_a(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

der Mittelwert von u über $\partial B_a(\mathbf{x}_0)$ ist.

Beweis

Führe nun ein neues kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung im Punkt \mathbf{x}_0 ein, so dass $B_a(\mathbf{x}_0)$ in $B_a(\mathbf{0})$ übergeht. Aus der Poissonschen Formel folgt

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{an\omega_n} \int_{|\mathbf{y}|=a} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \, d\mathbf{y}, \quad |\mathbf{x}| < a$$

und insbesondere

$$u(\mathbf{0}) = \frac{a}{n\omega_n} \int_{|\mathbf{y}|=a} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{y}|^n} \, d\mathbf{y} = \frac{1}{n\omega_n a^{n-1}} \int_{|\mathbf{y}|=a} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \overline{u}_a(\mathbf{0}).$$

Im ursprünglichen Koordinatensystem ist diese Gleichung eben

$$u(\mathbf{x}_0) = \overline{u}_a(\mathbf{x}_0).$$

□

Lemma (Mittelwertungleichungen)

1. Es sei $u \in C^2(B_a(\mathbf{x}_0)) \cap C(\overline{B}_a(\mathbf{x}_0))$ subharmonisch in $B_a(\mathbf{x}_0)$. Dann gilt

$$u(\mathbf{x}_0) \leq \overline{u}_a(\mathbf{x}_0).$$

2. Es sei $v \in C^2(B_a(\mathbf{x}_0)) \cap C(\overline{B}_a(\mathbf{x}_0))$ superharmonisch in $B_a(\mathbf{x}_0)$. Dann gilt

$$v(\mathbf{x}_0) \geq \overline{v}_a(\mathbf{x}_0).$$

Beweis

Es sei $w \in C^2(B_a(\mathbf{x}_0)) \cap C(\overline{B}_a(\mathbf{x}_0))$ die eindeutige Lösung des Randwertproblems

$$\Delta w = 0, \quad \mathbf{x} \in B_a(\mathbf{x}_0), \quad (3)$$

$$w = u, \quad \mathbf{x} \in \partial B_a(\mathbf{x}_0). \quad (4)$$

Die Funktionen u und w sind also subharmonisch bzw. harmonisch in $B_a(\mathbf{x}_0)$ und haben dieselben Randwerte auf $\partial B_a(\mathbf{x}_0)$. Aus dem Maximumsprinzip folgt also

$$u(\mathbf{x}) \leq w(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{B}_a(\mathbf{x}_0)$$

(siehe das Referat von Jakob und Weikert).

Es gilt also

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_0) &\leq w(\mathbf{x}_0) && \text{(obiges Ergebnis mit } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0) \\ &= \overline{w}_a(\mathbf{x}_0) && \text{(Mittelwertsatz für harmonische Funktionen)} \\ &= \overline{u}_a(\mathbf{x}_0) && (u = w \text{ auf } \partial B_a(\mathbf{x}_0).) \end{aligned}$$

Die zweite Aussage wird in ähnlicher Weise bewiesen. □

Die letzten zwei Ergebnisse führen zu den folgenden Verallgemeinerungen der Begriffe sub-, super- und harmonisch für Funktionen, die lediglich stetig sind.

Definition

Es sei u stetig in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Diese Funktion heißt

- **harmonisch im Mittelwertsinne** in Ω , falls $u(\mathbf{x}_0) = \overline{u}_a(\mathbf{x}_0)$
- **subharmonisch im Mittelwertsinne** in Ω , falls $u(\mathbf{x}_0) \leq \overline{u}_a(\mathbf{x}_0)$
- **superharmonisch im Mittelwertsinne** in Ω , falls $u(\mathbf{x}_0) \geq \overline{u}_a(\mathbf{x}_0)$

für alle $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und alle $a > 0$ mit $\overline{B}_a(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ ist.

Bemerkung

Es sei $u \in C^2(\Omega)$. Unsere Ergebnisse zeigen:

$$\left. \begin{array}{ll} - \Delta u = 0 \text{ in } \Omega & \Rightarrow u(\mathbf{x}_0) = \bar{u}_a(\mathbf{x}_0) \\ - \Delta u \leq 0 \text{ in } \Omega & \Rightarrow u(\mathbf{x}_0) \leq \bar{u}_a(\mathbf{x}_0) \\ - \Delta u \geq 0 \text{ in } \Omega & \Rightarrow u(\mathbf{x}_0) \geq \bar{u}_a(\mathbf{x}_0) \end{array} \right\} \text{ für alle } \mathbf{x}_0 \in \Omega \text{ und alle } a > 0 \text{ mit } \bar{B}_a(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$$

Wir beweisen nun, dass die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls gilt, sodass die zwei Definitionen von 'subharmonisch', 'superharmonisch' und 'harmonisch' für zweimal stetig differenzierbare Funktionen äquivalent sind.

Wir brauchen nun das folgende Hilfslemma.

Lemma

Es sei u zweimal stetig differenzierbar in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(\mathbf{x})} \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $\bar{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$.

Beweis

Die Substitution

$$\mathbf{z} = \frac{1}{r}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

bildet $B_r(\mathbf{x})$ auf $B_1(\mathbf{0})$ ab und liefert

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla_{\mathbf{y}} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{z} \\
 &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} \nabla u(\mathbf{y}) \cdot \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} \right) \, d\mathbf{y} \\
 &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} \nabla u(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\
 &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\
 &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(\mathbf{x})} \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},
 \end{aligned}$$

wobei die Identitäten

- $\mathbf{n}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r}$ auf $\partial B_r(\mathbf{x})$;
- $\int_G \Delta w = \int_{\partial G} \frac{\partial w}{\partial n}$ für alle $w \in C^2(\overline{G})$ und alle Gebiete $G \subset \mathbb{R}^n$

benutzt wurden. □

Satz

1. Es sei $u \in C^2(\Omega)$ subharmonisch im Mittelwertsinne in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt $-\Delta u \leq 0$ in Ω .
2. Es sei $u \in C^2(\Omega)$ superharmonisch im Mittelwertsinne in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt $-\Delta u \geq 0$ in Ω .
3. Es sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch im Mittelwertsinne in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt $-\Delta u = 0$ in Ω .

Beweis

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$. Das letzte Lemma besagt

$$\frac{d}{dr} \left(\bar{u}_r(\mathbf{x}_0) \right) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} \Delta u \, d\mathbf{y},$$

und Integration über $(0,R)$ liefert

$$\bar{u}_R(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \int_0^R r F_r(\mathbf{x}) \, dr,$$

wobei

$$F_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{\underbrace{\omega_n r^n}_{\substack{\text{Rauminhalt} \\ \text{von } B_r(\mathbf{x})}}} \int_{B_r(\mathbf{x})} \Delta u \, dy$$

der Mittelwert von Δu über $B_r(\mathbf{x})$ ist.

Es sei u nun subharmonisch in Ω , so dass $u(\mathbf{x}) \leq \bar{u}_R(\mathbf{x})$ und daher

$$\int_0^R r F_r(\mathbf{x}) \, dr \geq 0 \quad (\star)$$

für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ und $R > 0$ mit $\bar{B}_R(\mathbf{x}) \subset \Omega$ ist. Daraus folgt die Existenz von $S(\mathbf{x})$, so dass $F_r(\mathbf{x}) \geq 0$ für $r \in [0, S(\mathbf{x})]$ ist. (Sonst existiert $R(\mathbf{x}) > 0$ mit $F_r(\mathbf{x}) < 0$ für $r \in (0, R(\mathbf{x}))$, und dies widerspricht (\star) .)

Dies impliziert, dass $\Delta u(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ ist. (Falls $\Delta u(\mathbf{x}_0) < 0$ ist, existiert wegen der Stetigkeit von Δu eine positive reelle Zahl r , die kleiner als $S(\mathbf{x}_0)$ gewählt werden kann, so dass $\Delta u < 0$ in $B_r(\mathbf{x}_0)$ ist. Dann ist aber der Mittelwert $F_r(\mathbf{x}_0)$ von Δu über $B_r(\mathbf{x}_0)$ negativ.)

Die anderen Aussagen werden in ähnlicher Weise bewiesen. □

6.3 Das starke Maximumsprinzip

Satz (Das starke Maximumsprinzip)

Es seien Ω ein beschränktes Gebiet und $u \in C(\bar{\Omega})$ eine in Ω im Mittelwertsinne subharmonische Funktion. Dann gilt **entweder**

- $u(\mathbf{x}) < \max_{\mathbf{y} \in \bar{\Omega}} u(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$

oder

- u ist konstant auf $\bar{\Omega}$

Beweis

Da u stetig auf der beschränkten, abgeschlossenen, nichtleeren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist, wird das Maximum M von u über $\overline{\Omega}$ in einem Punkt $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$ angenommen. Wir zeigen nun:

$$\mathbf{x}_0 \text{ liegt in } \Omega \quad \Rightarrow \quad u = M \text{ auf } \overline{\Omega}$$

Nehmen wir also an, es existiert $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ mit $u(\mathbf{x}_0) = M$. Wähle $r > 0$, so dass $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \in \Omega$. Es folgt

$$\begin{aligned} M &= u(\mathbf{x}_0) \\ &\leq \overline{u}_r(\mathbf{x}_0) && (u \text{ ist subharmonisch in } \Omega) \\ &\leq M && (\text{da } u \leq M \text{ überall in } \Omega \text{ ist, ist der Mittelwert von } u \\ &&& \text{über jede Teilmenge von } \Omega \text{ kleiner gleich } M) \end{aligned}$$

so dass

$$\overline{u}_r(\mathbf{x}_0) = M.$$

Da der Mittelwert von u über $\partial B_r(\mathbf{x}_0)$ gleich dem Maximum M von u ist, ist

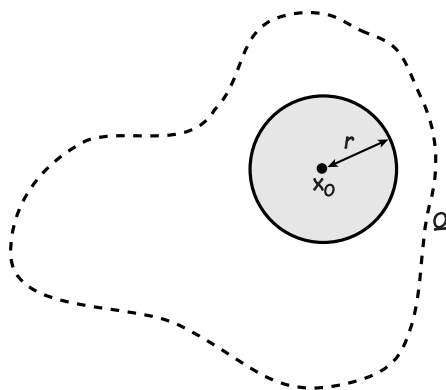
$$u(\mathbf{x}) = M, \quad \mathbf{x} \in \partial B_r(\mathbf{x}_0).$$

Dasselbe Argument funktioniert für jedes positive $a < r$. Es gilt also

$$u(\mathbf{x}) = M, \quad \mathbf{x} \in \partial B_a(\mathbf{x}_0)$$

für jedes $a \in (0, r)$ und daher gilt

$$u(\mathbf{x}) = M, \quad \mathbf{x} \in \overline{B}_r(\mathbf{x}_0).$$



Die Annahme, dass $u(\mathbf{x}_0) = M$ führt dazu, dass $u = M$ in der schraffierten Region.

Insbesondere zeigt dieses Argument, dass die Menge

$$S_1 = \{\mathbf{x}_0 \in \Omega : u(\mathbf{x}_0) = M\}$$

offen ist: Für jeden Punkt $\mathbf{x}_0 \in S_1$ gilt $B_r(\mathbf{x}_0) \subset S_1$, wobei r wie oben definiert ist. Da u stetig ist, ist die Menge

$$S_2 = \{\mathbf{x}_0 \in \Omega : u(\mathbf{x}_0) < M\}$$

ebenfalls offen: Falls $u(\mathbf{x}_0) < M$ ist, existiert $r > 0$, so dass $u(\mathbf{x}) < M$ für $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$ ist, und damit ist $B_r(\mathbf{x}_0) \subset S_2$.

Offensichtlich ist $\Omega = S_1 \cup S_2$ und $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, so dass S_1, S_2 eine offene Zerlegung von Ω ist. Da Ω aber offen und zusammenhängend ist, ist entweder $S_1 = \emptyset$ oder $S_2 = \emptyset$. Wir haben angenommen, dass $S_1 \neq \emptyset$ ist. Damit gilt $S_2 = \emptyset$, d.h.

$$u(\mathbf{x}) = M, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

und aus der Stetigkeit von u folgt

$$u(\mathbf{x}) = M, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}.$$

□

Bemerkung

Dieser Beweis zeigt, dass das Maximumsprinzip auch für ein Funktionen $u \in C(\overline{\Omega})$ mit der folgenden Eigenschaft gilt:

- Zu jedem $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ gilt

$$u(\mathbf{x}_0) \leq \overline{u}_r(\mathbf{x}_0) \tag{*}$$

für alle hinreichend kleinen Werte von r .

Offensichtlich genügen subharmonische Funktionen dieser Eigenschaft, denn für sie gilt (*) für alle r mit $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$.

Bemerkungen

1. Das schwache Minimumsprinzip

$$\max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} u(\mathbf{x})$$

folgt direkt aus dem starken Maximumsprinzip.

2. Dasselbe Argument liefert das starke (und schwache) Minimumsprinzip für im Mittelwertsinne superharmonische Funktionen.
3. Das auf dem Maximumsprinzip basierende Argument im Referat von Jakob und Weikert zeigt die Eindeutigkeit einer in einem beschränkten Gebiet Ω im Mittelwertsinne harmonischen Funktion mit vorgeschriebenen Werten auf $\partial\Omega$.

Beispiel

Es seien Ω ein beschränktes Gebiet, $u_1, u_2 \in C(\overline{\Omega})$ in Ω im Mittelwertsinne subharmonische Funktionen und $u \in C(\overline{\Omega})$ eine in Ω im Mittelwertsinne harmonische Funktion. Zeigen Sie:

1. $\max(u_1, u_2)$ ist im Mittelwertsinne subharmonisch in Ω ;
2. $\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| = \max_{x \in \partial\Omega} |u(x)|$.

Lösung

1. Definiere $u(x) = \max(u_1(x), u_2(x))$. Wähle $x_0 \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Es gilt

$$\begin{aligned} u_1(x_0) &\leq \overline{u}_{1r}(x_0), \\ u_2(x_0) &\leq \overline{u}_{2r}(x_0), \end{aligned}$$

denn u_1, u_2 sind subharmonisch in Ω , und

$$\begin{aligned} \overline{u}_{1r}(x_0) &\leq \overline{u}_r(x_0), \\ \overline{u}_{2r}(x_0) &\leq \overline{u}_r(x_0), \end{aligned}$$

denn $u_1 \leq u, u_2 \leq u$. Es folgt also

$$\begin{aligned} u_1(x_0) &\leq \overline{u}_r(x_0), \\ u_2(x_0) &\leq \overline{u}_r(x_0) \end{aligned}$$

und daher

$$u(x_0) \leq \overline{u}_r(x_0).$$

Da diese Ungleichung für alle Kugeln $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$ gilt, ist u subharmonisch in Ω .

2. Aus der Identität

$$|\alpha| = \max(\alpha, -\alpha)$$

folgt

$$u(\mathbf{x}) = \max(u(\mathbf{x}), -u(\mathbf{x})).$$

Dass u harmonisch ist, impliziert, dass $-u$ harmonisch ist, und insbesondere sind u und $-u$ subharmonisch. Aus Teil (i) folgt dann, dass $|u|$ ebenfalls subharmonisch ist. Eine Anwendung des schwachen Maximumsprinzips zeigt nun, dass

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})| = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |u(\mathbf{x})|.$$

ist. □

Satz

Es sei $u \in C(\Omega)$ harmonisch im Mittelwertsinne in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist u zweimal stetig differenzierbar und es gilt $\Delta u = 0$ in Ω .

Beweis

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\bar{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$, so dass $u \in C(\bar{B}_r(\mathbf{x}_0))$ und u harmonisch in Ω ist.

Betrachte das Randwertproblem

$$\Delta w = 0, \quad \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0), \quad (5)$$

$$w = u, \quad \mathbf{x} \in \partial B_r(\mathbf{x}_0), \quad (6)$$

dessen eindeutige Lösung durch die Poissonsche Formel

$$w(\mathbf{x}) = \frac{r^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{rn\omega_n} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}$$

gegeben ist.

Insbesondere ist w harmonisch im Mittelwertsinne in $B_r(\mathbf{x}_0)$ und gleich u auf $\partial B_r(\mathbf{x}_0)$. Die Funktion u hat aber auch diese Eigenschaften. Dem Eindeutigkeitsatz zufolge gilt also

$$u = w, \quad \text{in } \bar{B}_r(\mathbf{x}_0).$$

Insbesondere ist $u \in C^2(B_r(\mathbf{x}_0))$ mit $\Delta u = 0$ in $B_r(\mathbf{x}_0)$.

Da dies für alle Kugeln $\bar{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ gilt, ist $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$ in Ω . □

Bemerkung

Dieser Satz besagt, dass die 'klassische' Definition einer harmonischen Funktion äquivalent zur Definition durch Mittelwerte ist. Ab sofort werden wir also nur von 'harmonischen Funktionen' reden.

6.4 Konvergenzsätze für Folgen harmonischer Funktionen

In diesem Abschnitt besprechen wir, wann eine Folge harmonischer Funktionen gegen eine harmonische Funktion konvergiert.

Lemma

Es seien u_k , $k = 1, 2, \dots$ in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

1. u_k ist harmonisch in Ω für $k = 1, 2, \dots$;
2. $\{u_k\}$ ist gleichmäßig konvergent auf $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$ für alle $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$.

Dann ist der punktweise Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ harmonisch in Ω .

Beweis

Es sei

$$u(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

(Da $\{u_k\}$ gleichmäßig konvergent auf jeder abgeschlossenen Kugel $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ ist, konvergiert $u(\mathbf{x})$ für alle \mathbf{x} in einer solchen Kugel, d.h. für alle $\mathbf{x} \in \Omega$.)

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\mathbf{x}_0) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} u_k(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (u_k \text{ ist harmonisch}) \\
 &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (u_k \rightarrow u \text{ gleichmäßig auf } \overline{B_r(\mathbf{x}_0)}) \\
 &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.
 \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $\overline{B_r(\mathbf{x}_0)} \subset \Omega$ gilt, ist u in Ω harmonisch. \square

Satz (der erste Harnacksche Konvergenzsatz)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u_k \in C(\overline{\Omega})$, $k = 1, 2, \dots$ Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

1. u_k ist harmonisch in Ω für $k = 1, 2, \dots$;
2. Die Folge $\{g_k\}$ mit $g_k = u_k|_{\partial\Omega}$ ist gleichmäßig konvergent auf $\partial\Omega$.

Dann ist $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ harmonisch in Ω mit $u|_{\partial\Omega} = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$.

Beweis

Da $\{g_k\}$ gleichmäßig auf $\partial\Omega$ konvergiert, ist $\{g_k\}$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge in $\overline{\Omega}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also $N > 0$, so dass

$$|g_m(\mathbf{x}) - g_n(\mathbf{x})| < \varepsilon \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Omega \text{ und alle } m, n > N.$$

Weil u_m und u_n harmonisch in Ω sind, ist $u_m - u_n$ ebenfalls harmonisch in Ω , und aus dem Maximumsprinzip folgt

$$\max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} |u_m(\mathbf{x}) - u_n(\mathbf{x})| = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |u_m(\mathbf{x}) - u_n(\mathbf{x})|.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
 |u_m(\mathbf{x}) - u_n(\mathbf{x})| &\leq \max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} |u_m(\mathbf{x}) - u_n(\mathbf{x})| \\
 &= \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |g_m(\mathbf{x}) - g_n(\mathbf{x})| \\
 &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ und alle $m, n > N$, so dass $\{u_k\}$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge in $\overline{\Omega}$ ist. Damit ist $\{u_k\}$ in $\overline{\Omega}$ gleichmäßig konvergent.

Aus dem letzten Lemma folgt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ in Ω harmonisch ist, und offensichtlich gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$. \square

Satz (die Harnacksche Ungleichung)

Es sei $u \in C(\overline{B_R(\mathbf{x}_0)})$ harmonisch in $B_R(\mathbf{x}_0)$ und nichtnegativ auf $\overline{B_R(\mathbf{x}_0)}$.

Dann gilt die **Harnacksche Ungleichung**

$$u(\mathbf{x}_0) \left(\frac{R}{R+r} \right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} \leq u(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{x}_0) \left(\frac{R}{R-r} \right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r}, \quad \mathbf{x} \in \overline{B_r(\mathbf{x}_0)}$$

für alle $r < R$.

Beweis

Aus der Poissonschen Formel folgt

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y} \tag{1}$$

für $\mathbf{x} \in B_R(\mathbf{x}_0)$ und insbesondere für $\mathbf{x} \in \overline{B_r(\mathbf{x}_0)}$.

Es gilt nun

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &= |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = R + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, \\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &= |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| \geq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = R - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \end{aligned}$$

für $\mathbf{y} \in \overline{B_R(\mathbf{x}_0)}$. Einsetzen in (1) ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{(R + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)^n} R^{n-2} \underbrace{\left(\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)}_{= u(\mathbf{x}_0)} \\ & \leq u(\mathbf{x}) \\ & \leq \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{(R - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)^n} R^{n-2} \underbrace{\left(\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)}_{= u(\mathbf{x}_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & u(\mathbf{x}_0) \left(\frac{R}{R + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right)^{n-2} \frac{R - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{R + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \\ & \leq u(\mathbf{x}) \\ & \leq u(\mathbf{x}_0) \left(\frac{R}{R - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right)^{n-2} \frac{R + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{R - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Harnacksche Ungleichung, indem wir die Abschätzung

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq r$$

in der vorigen Ungleichung benutzen. □

Korollar (Satz von Liouville)

Es sei $u \in C(\mathbb{R}^n)$ eine harmonische Funktion, die nach oben oder nach unten beschränkt ist. Dann ist u konstant.

Beweis

Definiere $v(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) - m$, falls $u(\mathbf{x}) \geq m$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist, und $v(\mathbf{x}) := M - u(\mathbf{x})$, falls $u(\mathbf{x}) \leq M$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist. Damit ist v überall harmonisch und nicht-negativ.

Wähle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ groß genug, so dass $|\mathbf{x}| < r$ ist. Aus der Harnackschen Ungleichung folgt

$$v(\mathbf{0}) \left(\frac{R}{R+r} \right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} \leq v(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{0}) \left(\frac{R}{R-r} \right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r}$$

für $R > r$, und im Limes $R \rightarrow \infty$ ergibt diese Abschätzung

$$v(\mathbf{0}) \leq v(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{0}),$$

so dass

$$v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{0})$$

und daher

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{0})$$

ist. □

Satz (der zweite Harnacksche Konvergenzsatz)

Es seien $u_k, k = 1, 2, \dots$ in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

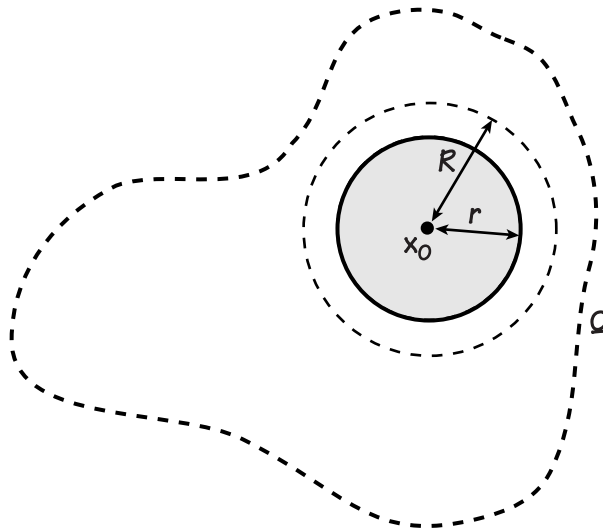
1. u_k ist harmonisch in Ω für $k = 1, 2, \dots$;
2. $u_k \leq u_{k+1}$ für $k = 1, 2, \dots$;
3. $\{u_k(\mathbf{x})\}$ ist nach oben beschränkt für jedes $\mathbf{x} \in \Omega$.

Dann konvergiert $\{u_k\}$ punktweise gegen eine in Ω harmonische Funktion u und die Konvergenz ist gleichmäßig in jeder abgeschlossenen Kugel $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$.

Beweis

Wir zeigen, dass $\{u_k\}$ auf jeder abgeschlossenen Kugel $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ gleichmäßig konvergent ist. Das Ergebnis folgt dann unmittelbar aus dem ersten Lemma in diesem Abschnitt.

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$. Da Ω offen ist, existiert $R > r$, so dass $B_R(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ ist.



Für $k > \ell$ ist $u_k - u_\ell$ harmonisch und nichtnegativ in Ω und insbesondere in $B_R(\mathbf{x}_0)$. Aus der Harnackschen Ungleichung folgt also

$$u_k(\mathbf{x}) - u_\ell(\mathbf{x}) \leq (u_k(\mathbf{x}_0) - u_\ell(\mathbf{x}_0)) \left(\frac{R}{R-r} \right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r}$$

für $\mathbf{x} \in \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$.

Beachte, dass $\{u_k(\mathbf{x}_0)\}$ konvergent und folglich eine Cauchy-Folge ist: $u_k(\mathbf{x}_0) - u_\ell(\mathbf{x}_0) \rightarrow 0$ für $k, \ell \rightarrow \infty$ mit $k > \ell$. Die letzte Ungleichung impliziert nun, dass $u_k(\mathbf{x}) - u_\ell(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ für $k, \ell \rightarrow \infty$ mit $k > \ell$, und zwar gleichmäßig in $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$. Die Funktionenfolge $\{u_k\}$ ist also eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$ und daher gleichmäßig konvergent auf $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$. \square

Bemerkung

Die dritte Voraussetzung lässt sich durch die folgende schwächere Voraussetzung ersetzen:

- Es existiert $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, so dass $\{u_k(\mathbf{x}_0)\}$ nach oben beschränkt ist.

Die Methode im Beweis zeigt nämlich, dass $\{u_k\}$ auf $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$ für alle $r > 0$ mit $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ gleichmäßig konvergent ist. Damit ist $\{u_k(\mathbf{x})\}$ konvergent und daher nach oben beschränkt für alle $\mathbf{x} \in \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$.

Wir verfahren nun wie im Beweis des starken Maximumsprinzips. Das obige Argument zeigt insbesondere, dass die Menge

$$S_1 = \{\mathbf{x}_0 \in \Omega : u_k(\mathbf{x}_0) \text{ ist nach oben beschränkt}\}$$

offen ist: Für jeden Punkt $\mathbf{x}_0 \in S_1$ gilt $B_r(\mathbf{x}_0) \subset S_1$, wobei r wie im obigen Beweis definiert ist. Betrachte nun die Menge

$$S_2 = \{\mathbf{x}_0 \in \Omega : u_k(\mathbf{x}_0) \text{ ist nicht nach oben beschränkt}\}.$$

Für jeden Punkt $\mathbf{x}_0 \in S_2$ gibt es eine Folge $\{k_n\}$ natürlicher Zahlen mit $k_n \rightarrow \infty$ und $u_{k_n}(\mathbf{x}_0) > n$. Wähle r und R wie im obigen Beweis. Aus der Harnackschen Ungleichung folgt

$$u_{k_n}(\mathbf{x}) \geq u_{k_n}(\mathbf{x}_0) \left(\frac{R}{R+r} \right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

für alle $\mathbf{x} \in \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$, und damit ist $B_r(\mathbf{x}_0) \subset S_2$. Die Menge S_2 ist also auch offen.

Offensichtlich ist $\Omega = S_1 \cup S_2$ und $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, so dass S_1, S_2 eine offene Zerlegung von Ω ist. Da Ω aber offen und zusammenhängend ist, ist entweder $S_1 = \emptyset$ oder $S_2 = \emptyset$. Wir haben angenommen, dass $S_1 \neq \emptyset$ ist. Damit gilt $S_2 = \emptyset$, so dass $\{u(\mathbf{x})\}$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ nach oben beschränkt ist.

6.5 Die Perronsche Methode

Die Perronsche Methode ist eine abstrakte Methode zur Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & \mathbf{x} &\in \Omega, \\ u &= g, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^n und $g \in C(\partial\Omega)$ sind.

Diese Methode bedient sich der Konvergenzsätze für harmonische Funktionen aus dem letzten Abschnitt sowie weiterer Ergebnisse für im Mittelwertsinne subharmonische Funktionen, die wir jetzt beschreiben.

Harmonische Liftung

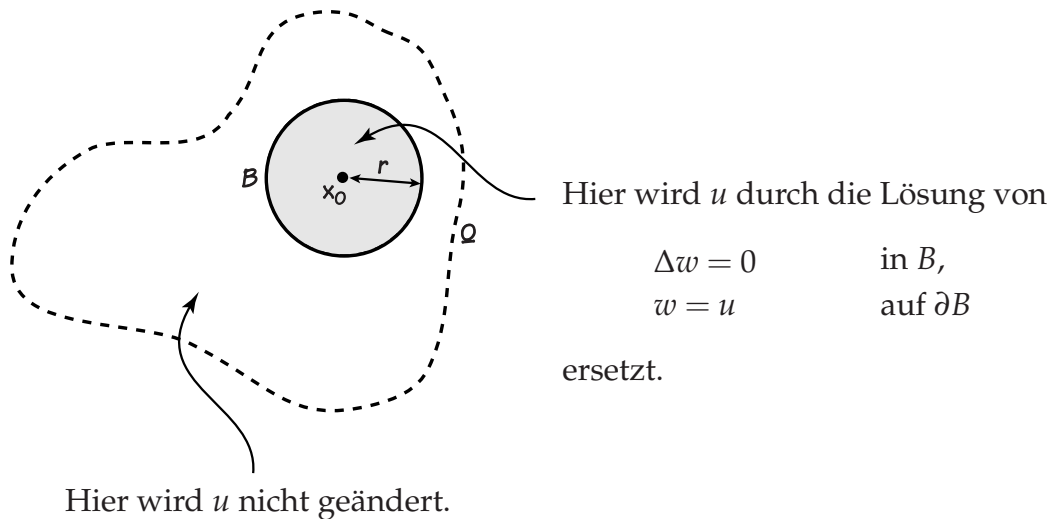
In diesem Abschnitt ist Ω immer ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^n und der Begriff 'subharmonisch' bedeutet 'subharmonisch im Mittelwertsinne'.

Definition

Es seien $u \in C(\overline{\Omega})$ und $B = B_r(\mathbf{x}_0)$ eine offene Kugel, deren Abschluss in Ω liegt. Die **harmonische Liftung** von u ist die durch die Formel

$$u_B(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{r^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}, & \mathbf{x} \in B, \\ u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \setminus B \end{cases}$$

definierte Funktion $u_B \in C(\overline{\Omega})$.



Lemma

$u \in C(\overline{\Omega})$ ist subharmonisch genau dann, wenn $u \leq u_B$ für jede offene Kugel B ist, deren Abschluss in Ω liegt.

Beweis

Die Aussage ' $u \leq u_B$ ' bedeutet

$$u(\mathbf{x}) \leq \begin{cases} \frac{r^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}, & \mathbf{x} \in B, \\ u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \setminus B, \end{cases}$$

und diese Ungleichung ist offensichtlich äquivalent zu

$$u(\mathbf{x}) \leq \frac{r^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in B. \quad (1)$$

Die Aussage

' $u \leq u_B$ für jede offene Kugel B , deren Abschluss in Ω liegt'

bedeutet also, dass die Ungleichung (1) für jede offene Kugel B gilt, deren Abschluss in Ω liegt.

Es gelte nun (1) für jede offene Kugel $B = B_r(\mathbf{x}_0)$, deren Abschluss in Ω liegt. Dann gilt (1) insbesondere für $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, so dass

$$u(\mathbf{x}_0) \leq \frac{r}{n\omega_n} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y} = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \bar{u}_r(\mathbf{x}_0)$$

für alle $B_r(\mathbf{x}_0)$ mit $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) \in \Omega$ ist. Damit ist u subharmonisch in Ω .

Es sei nun u subharmonisch in Ω und B eine offene Kugel, deren Abschluss in Ω liegt. Die Funktion

$$w := u(\mathbf{x}) - \underbrace{\frac{r^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}}_{\substack{\text{harmonisch in } B, \\ \text{gleich } u \text{ auf } \partial B}}$$

ist subharmonisch in B und verschwindet auf ∂B . Dem Maximumsprinzip zufolge gilt also $w \leq 0$ auf \overline{B} , welches (1) impliziert. \square

Korollar

Es habe $u \in C(\overline{\Omega})$ die folgende Eigenschaft:

- Zu jedem $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ gilt

$$u(\mathbf{x}_0) \leq \overline{u}_r(\mathbf{x}_0) \quad (\star)$$

für alle hinreichend kleinen Werte von r .

Dann ist u subharmonisch in Ω .

Beweis

Das starke Maximumsprinzip gilt unverändert für Funktionen mit der Eigenschaft (\star) (siehe die Bemerkung unter dem Beweis des starken Maximumsprinzips).

Es sei B eine offene Kugel, deren Abschluss in Ω liegt. Die Funktion

$$w := u(\mathbf{x}) - \underbrace{\frac{r^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}}_{\substack{\text{harmonisch in } B, \\ \text{gleich } u \text{ auf } \partial B}}$$

ist subharmonisch in B und verschwindet auf ∂B . Dem Maximumsprinzip zufolge gilt also $w \leq 0$ auf \overline{B} , so dass $u \leq u_B$ in B . In $\Omega \setminus B$ gilt wiederum $u = u_B$.

Damit ist $u \leq u_B$ für jede offene Kugel B , deren Abschluss in Ω liegt, und aus dem letzten Lemma folgt, dass u subharmonisch in Ω ist. \square

Satz

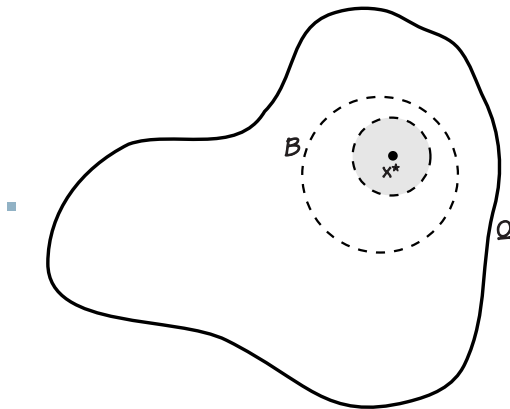
Es seien $u \in C(\overline{\Omega})$ eine subharmonische Funktion und B eine offene Kugel, deren Abschluss in Ω liegt. Dann ist u_B subharmonisch.

Beweis

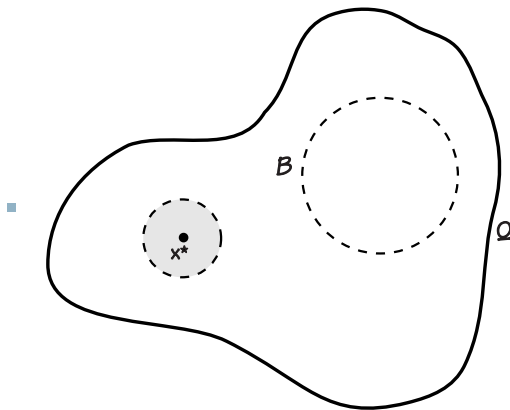
Wir zeigen: Zu jedem $\mathbf{x}^* \in \Omega$ gilt

$$u_B(\mathbf{x}^*) \leq \overline{(u_B)_\rho}(\mathbf{x}^*)$$

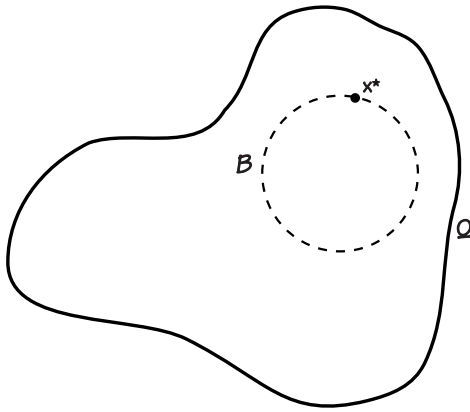
für alle hinreichend kleinen Werte von ρ .



Für $\mathbf{x}^* \in B$ wählen wir ρ mit $B_\rho(\mathbf{x}^*) \subset B$. Weil u_B harmonisch in B ist, gilt $u_B(\mathbf{x}^*) = \overline{(u_B)_\rho}(\mathbf{x}^*)$.



Für $\mathbf{x}^* \in \Omega \setminus \overline{B}$ wählen wir ρ mit $B_\rho(\mathbf{x}^*) \subset \Omega \setminus \overline{B}$. Weil u_B subharmonisch in $\Omega \setminus \overline{B}$ ist, gilt $u_B(\mathbf{x}^*) \leq \overline{(u_B)_\rho}(\mathbf{x}^*)$.



Für $\mathbf{x}^* \in \partial B$ gilt

$$\begin{aligned} u_B(\mathbf{x}^*) &= u(\mathbf{x}^*) \\ &\leq \bar{u}_\rho(\mathbf{x}^*) \quad (u \text{ ist subharmonisch}) \\ &\leq \overline{(u_B)_\rho}(\mathbf{x}^*) \quad (u \leq u_B) \end{aligned}$$

für alle ρ mit $\bar{B}_\rho(\mathbf{x}^*) \subset \Omega$.

□

Lemma

Es erfüllen $u, w \in C(\bar{\Omega})$ die Ungleichung $u \leq w$ in Ω . Dann gilt $u_B \leq w_B$ für jede offene Kugel B , deren Abschluss in Ω liegt.

Beweis

Für $\mathbf{x} \in \Omega \setminus B$ ist $u_B(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$ und $w_B(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})$, so dass $u \leq w$ auf $\Omega \setminus B$ ist. Es bleibt also zu zeigen, dass $u_B \leq w_B$ in B ist.

Die Funktionen u_B und w_B sind harmonisch in B und genügen $u_B = u \leq w = w_B$ auf ∂B . Aus dem Vergleichsprinzip (siehe das Referat von Jakob und Weikert) folgt also $u_B \leq w_B$ in B . □

Die Perronsche Methode

Wir besprechen nun die Perronsche Methode zur Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$u = g, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2)$$

wobei $g \in C(\partial\Omega)$ ist. In diesem Abschnitt ist Ω immer ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^n und der Begriff 'subharmonisch' bedeutet 'subharmonisch im Mittelwertsinne'.

Definition

Die **Perron-Klasse** ist die Menge

$$P_g = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u \text{ ist subharmonisch in } \Omega, u(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in \partial\Omega\}.$$

Bemerke, dass P_g nicht leer ist: Die konstante Funktion $u(\mathbf{x}) = m$, wobei $m = \min_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} g(\mathbf{x})$ ist, liegt in P_g .

Nun definieren wir die Funktion $u_g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Formel

$$u_g(\mathbf{x}) = \sup_{u \in P_g} u(\mathbf{x}).$$

(Die Rechnung

$$\underbrace{u(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} u(\mathbf{y})}_{\text{Maximumsprinzip}} \leq \max_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} g(\mathbf{y}), \quad u \in P_g, \mathbf{x} \in \overline{\Omega}$$

zeigt, dass das Supremum existiert.)

Wir zeigen:

- u_g ist harmonisch in Ω ;
- $u_g \in C(\overline{\Omega})$ und $u_g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \partial\Omega$.

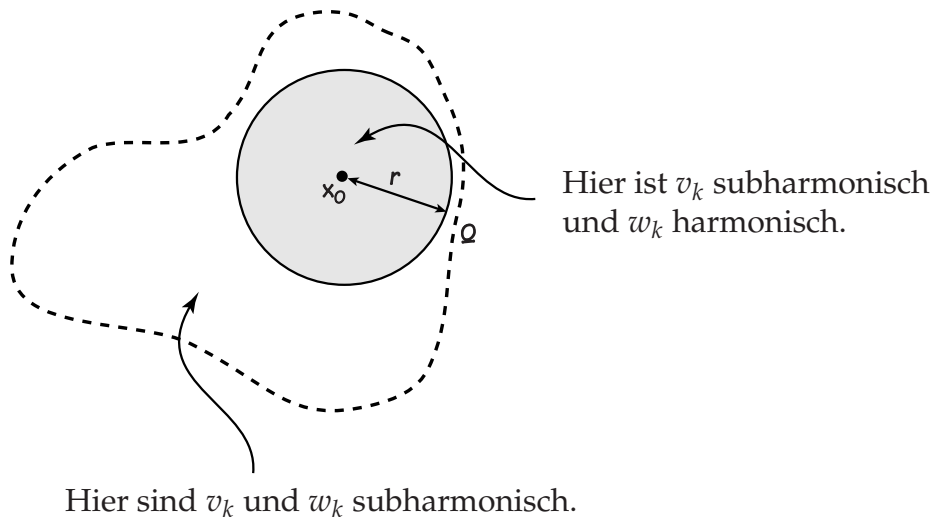
Somit haben wir die Existenz einer Lösung des Randwertproblems (1), (2) bewiesen. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumsprinzip (siehe das Referat von Jakob und Weikert).

Satz

Die Funktion $u_g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ist harmonisch in Ω .

Beweis

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und $r > 0$, so dass der Abschluss von $B := B_r(\mathbf{x}_0)$ in Ω liegt.



Aus der Definition von $u_g(\mathbf{x}_0)$ folgt die Existenz einer **maximierenden Folge** $\{u_k(\mathbf{x}_0)\}$ mit den Eigenschaften

- $u_k \in P_g$ für $k = 1, 2, \dots$;
- $u_k(\mathbf{x}_0) \leq u_{k+1}(\mathbf{x}_0)$ für $k = 1, 2, \dots$;
- $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\mathbf{x}_0) = u_g(\mathbf{x}_0)$.

Betrachte nun die durch die Formel

$$v_k(\mathbf{x}) = \max\{u_1(\mathbf{x}), \dots, u_k(\mathbf{x})\}$$

definierten Funktionen $v_k \in C(\overline{\Omega})$. Diese Funktionen haben die folgenden Eigenschaften:

- v_k liegt in P_g , denn v_k ist subharmonisch in Ω mit $v_k \leq g$ auf $\partial\Omega$;
- $v_k \leq v_{k+1}$ für $k = 1, 2, \dots$;
- $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(\mathbf{x}_0) = u_g(\mathbf{x}_0)$, denn $v_k(\mathbf{x}_0) = u_k(\mathbf{x}_0)$.

Es sei $w_k \in C(\overline{\Omega})$ die harmonische Liftung $(v_k)_B$. Diese Funktion hat insbesondere die folgenden Eigenschaften:

- w_k ist harmonisch in B ;
- $w_k \leq w_{k+1}$, denn $v_k \leq v_{k+1}$;
- $w_k(\mathbf{x}_0) \leq u_g(\mathbf{x}_0)$ (denn w_k liegt in P_g : Sie ist subharmonisch in Ω und erfüllt $w_k = v_k \leq g$ auf $\partial\Omega$).

Es folgt also aus dem zweiten Harnackschen Konvergenzsatz, dass

$$w(\mathbf{x}) := \lim_{k \rightarrow \infty} w_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B$$

harmonisch ist.

Aus

$$w_k(\mathbf{x}) \leq u_g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B$$

erhalten wir im Limes $k \rightarrow \infty$

$$w(\mathbf{x}) \leq u_g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B.$$

Wir zeigen nun durch Widerspruch, dass

$$w(\mathbf{x}) = u_g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B.$$

Nehmen wir also an, es gibt $\mathbf{x}^* \in B$ mit $w(\mathbf{x}^*) < u_g(\mathbf{x}^*)$. Dann existiert eine Funktion $U \in P_g$ mit $w(\mathbf{x}^*) < U(\mathbf{x}^*)$. Wir betrachten nun die in Ω subharmonischen Funktionen $V_k = \max\{U, v_k\}$ und deren harmonische Liftungen $W_k = (V_k)_B$. Es gelten wieder

- W_k ist harmonisch in B ;
- $W_k \leq W_{k+1}$, denn $V_k \leq V_{k+1}$;
- $W_k(\mathbf{x}_0) \leq u_g(\mathbf{x}_0)$.

Es folgt also aus dem zweiten Harnackschen Konvergenzsatz, dass

$$W(\mathbf{x}) := \lim_{k \rightarrow \infty} W_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B$$

harmonisch ist. Außerdem ist

$$W(\mathbf{x}^*) \geq U(\mathbf{x}^*) > w(\mathbf{x}^*).$$

Es gilt nun:

- $w \leq W$ in B , denn $w_k \leq W_k$ in B ;
- $v_k \leq w_k$, denn $w_k = (v_k)_B$ und v_k ist subharmonisch in Ω . Damit ist

$$v_k(\mathbf{x}_0) \leq w_k(\mathbf{x}_0) \leq u_g(\mathbf{x}_0),$$

und im Limes $k \rightarrow \infty$ liefert diese Ungleichung

$$w(\mathbf{x}_0) = u_g(\mathbf{x}_0).$$

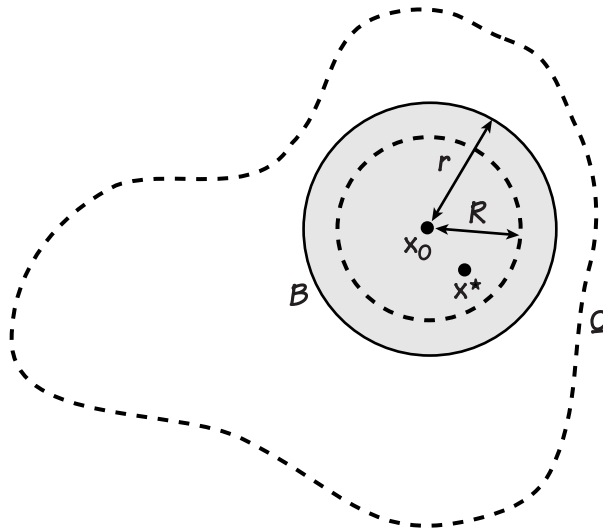
- $V_k \leq W_k$ und daher

$$\max\{U(\mathbf{x}_0), v_k(\mathbf{x}_0)\} \leq W_k(\mathbf{x}_0) \leq u_g(\mathbf{x}_0).$$

Daraus folgt

$$W(\mathbf{x}_0) = u_g(\mathbf{x}_0).$$

Es sei R eine reelle Zahl mit $|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0| < R < r$.



Dann ist $W - w$ stetig auf $\overline{B}_R(\mathbf{x}_0)$, harmonisch in $B_R(\mathbf{x}_0)$ und nichtnegativ auf $\partial B_R(\mathbf{x}_0)$. Da $W(\mathbf{x}_0) - w(\mathbf{x}_0) = 0$ ist, wird das Minimum von $W - w$ in einem Punkt im Inneren von $B_R(\mathbf{x}_0)$ angenommen. Dem starken Minimumsprinzip zufolge ist $W - w = 0$ auf $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$. Insbesondere gilt $W(\mathbf{x}^*) = w(\mathbf{x}^*)$. Dies widerspricht aber $W(\mathbf{x}^*) > w(\mathbf{x}^*)$.

Somit haben wir gezeigt, dass $u_g = w$ in B ist. Folglich ist u_g harmonisch in B . Das Argument funktioniert aber für jede Kugel B , deren Abschluss in Ω liegt. Die Funktion u ist also in ganz Ω harmonisch. \square

Wir müssen nun klären, ob die Funktion u_g stetig in $\overline{\Omega}$ ist und die Randbedingung $u_g = g$ auf $\partial\Omega$ erfüllt. Das nächste Beispiel zeigt, dass dies nicht immer der Fall ist.

Beispiel

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 && \text{für } 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ u &= 0 && \text{für } x^2 + y^2 = 1, \\ u &= -1 && \text{für } (x,y) = (0,0). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Perron-Lösung nicht stetig im Nullpunkt ist.

Lösung

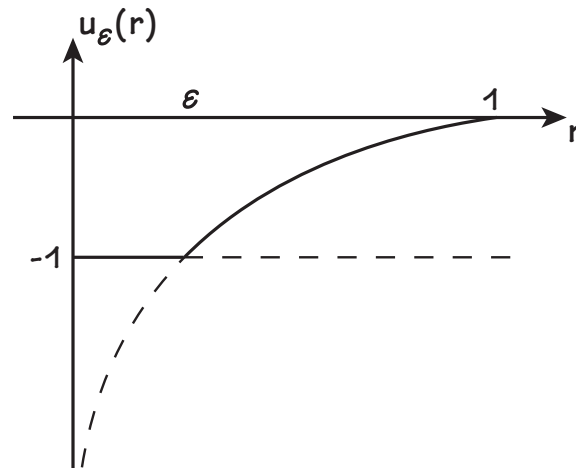
Es sei $0 < \varepsilon < 1$. Betrachte die Funktion

$$u_\varepsilon(r) = \begin{cases} -1, & 0 \leq r < \varepsilon, \\ -\frac{\log r}{\log \varepsilon}, & \varepsilon \leq r \leq 1, \end{cases}$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist. Diese Funktion ist stetig auf $\overline{B}_1(0,0)$, erfüllt die Randbedingungen im Mittelpunkt und am Einheitskreis, und aus der Rechnung

$$u_\varepsilon(r) = \max \left\{ \underbrace{-1}_{\text{harmonisch}}, \underbrace{-\frac{\log r}{\log \varepsilon}}_{\text{harmonisch}} \right\}$$

folgt, dass sie subharmonisch für $0 < x^2 + y^2 < 1$ ist. Sie liegt daher in der Perron-Klasse.



Die Perronsche Lösung u_g erfüllt:

▪

$$u_g(0,0) = \sup_{u \in P_g} u(0,0) = -1,$$

denn $u(0,0) \leq -1$ für alle $u \in P_g$ und $u_\varepsilon(0) = -1$;

▪

$$u_g(x,y) = \sup_{u \in P_g} u(x,y) \geq \sup_{0 < \varepsilon < 1} u_\varepsilon\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0$$

für $0 < x^2 + y^2 < 1$.

□

Es ist notwendig, eine Eigenschaft der Randpunkte vorauszusetzen, um eine Perron-Lösung der Klasse $C(\overline{\Omega})$ zu erhalten.

Definitionen

Eine Funktion $w \in C(\overline{\Omega})$ heißt **Barrierefunktion** im Punkt $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. w ist im Mittelwertsinne superharmonisch in Ω ;
2. $w(\mathbf{x}_0) = 0$;
3. $w(\mathbf{x}) > 0$ für $\mathbf{x} \in \overline{\Omega} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ heißt **regulärer Randpunkt**, falls es eine Barrierenfunktion im Punkt \mathbf{x}_0 gibt.

Satz

Es sei $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ ein regulärer Randpunkt. Dann gilt

$$\lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} \in \Omega}} u_g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}_0).$$

Beweis

Nach Voraussetzung existiert eine Barrierenfunktion w im Punkt \mathbf{x}_0 . Wähle $\varepsilon > 0$.

- Da g stetig im Punkt \mathbf{x}_0 ist, existiert $\delta > 0$, so dass

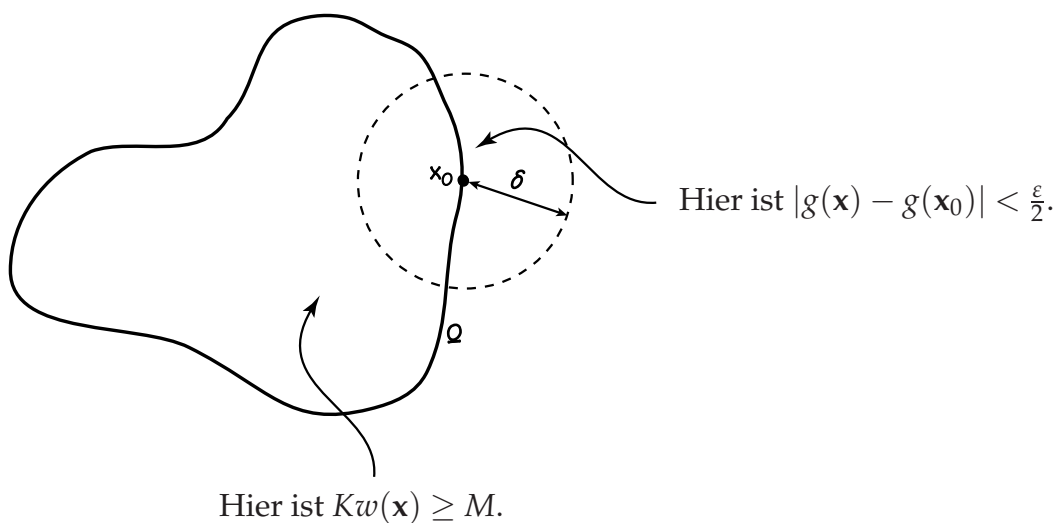
$$\mathbf{x} \in \partial\Omega, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

- Weil w positiv und stetig auf $\overline{\Omega} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ ist, existiert $m > 0$, so dass

$$\mathbf{x} \in \overline{\Omega}, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \geq \delta \quad \Rightarrow \quad w(\mathbf{x}) \geq m.$$

Es sei $M = \sup_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |g(\mathbf{x})|$ und $K = 2M/m$, so dass

$$\mathbf{x} \in \overline{\Omega}, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \geq \delta \quad \Rightarrow \quad K w(\mathbf{x}) \geq 2M.$$



Definiere $f_1 \in C(\overline{\Omega})$ durch die Formel

$$f_1(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) - \frac{\varepsilon}{2} - Kw(\mathbf{x}).$$

Diese Funktion ist subharmonisch in Ω und hat die folgenden Eigenschaften:

- Für $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ mit $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \geq \delta$ gilt

$$f_1(\mathbf{x}) = \underbrace{g(\mathbf{x}_0)}_{\leq M} + \underbrace{\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{< 0} + \underbrace{(-Kw(\mathbf{x}))}_{\leq -2M} \leq -M \leq g(\mathbf{x}).$$

- Für $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ mit $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ gilt

$$f_1(\mathbf{x}) = \underbrace{g(\mathbf{x}_0) - \frac{\varepsilon}{2}}_{< g(\mathbf{x})} + \underbrace{(-Kw(\mathbf{x}))}_{\leq 0} \leq g(\mathbf{x}).$$

Damit ist $f_1(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, so dass $f_1 \in P_g$ ist.

Die Stetigkeit von w im Punkt \mathbf{x}_0 impliziert die Existenz von $\Delta > 0$, so dass

$$\mathbf{x} \in \Omega, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \Delta \quad \Rightarrow \quad w(\mathbf{x}) < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

- Es gilt

$$u_g(\mathbf{x}) \geq f_1(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x}_0) - \varepsilon$$

für $\mathbf{x} \in \Omega$ mit $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \Delta$.

- Für alle $v \in P_g$ ist die durch die Formel

$$f_2(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) - \left(g(\mathbf{x}_0) + \frac{\varepsilon}{2} + Kw(\mathbf{x})\right)$$

definierte Funktion $f_2 \in C(\overline{\Omega})$ subharmonisch in Ω und nichtpositiv auf $\partial\Omega$ (betrachte die zwei Teile von $\partial\Omega$ wie oben und beachte, dass $v(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ ist). Dem Maximumsprinzip zufolge ist also f_2 nichtpositiv auf $\overline{\Omega}$. Es gilt also

$$\begin{aligned} u_g(\mathbf{x}) &= \sup_{v \in P_g} v(\mathbf{x}) \\ &\leq g(\mathbf{x}_0) + \frac{\varepsilon}{2} + Kw(\mathbf{x}) \\ &\leq g(\mathbf{x}_0) + \varepsilon \end{aligned}$$

für $\mathbf{x} \in \Omega$ mit $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \Delta$.

Damit gilt

$$\mathbf{x} \in \Omega, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \Delta \quad \Rightarrow \quad |u_g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon.$$

□

Korollar

Das Anfangswertproblem (1), (2) ist für alle Funktionen $g \in C(\partial\Omega)$ genau dann lösbar, wenn alle Punkte von $\partial\Omega$ regulär sind.

Beweis

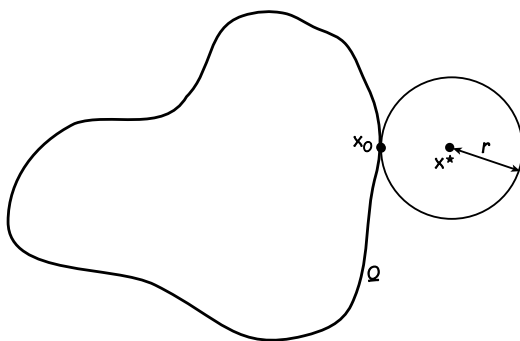
Es seien alle Punkte von $\partial\Omega$ regulär. Die obigen Resultate zeigen, dass das Anfangswertproblem für alle Funktionen $g \in C(\partial\Omega)$ lösbar ist.

Es sei nun das Anfangswertproblem für alle Funktionen $g \in C(\partial\Omega)$ lösbar. Wähle $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ und $g \in C(\partial\Omega)$ mit $g(\mathbf{x}_0) = 0$ und $g > 0$ auf $\partial\Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ (z.B. $g(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$). Die entsprechende Perron-Lösung $u_g \in C(\overline{\Omega})$ des Anfangswertproblems existiert nach Voraussetzung und erfüllt dem starken Minimumsprinzip zufolge $u_g > 0$ auf $\overline{\Omega} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$. Die Funktion u_g ist also eine Barrierenfunktion im Punkt \mathbf{x}_0 . \square

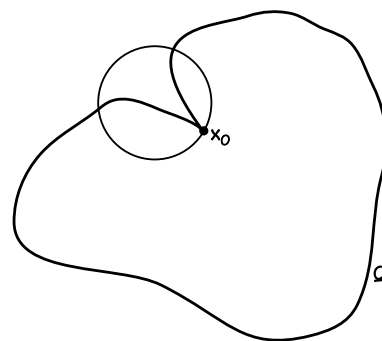
Es gibt geometrische Kriterien, die die Existenz einer Barrierenfunktion garantieren.

Definition

Der Randpunkt $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ erfüllt die **äußere Kugelbedingung**, falls es einen Punkt $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ und eine positive reelle Zahl r mit $\overline{B}_r(\mathbf{x}^*) \cap \overline{\Omega} = \{\mathbf{x}_0\}$ gibt.



Hier ist die äußere Kugelbedingung im Punkt \mathbf{x}_0 erfüllt.



Hier ist die äußere Kugelbedingung im Punkt \mathbf{x}_0 nicht erfüllt.

Lemma

Der Randpunkt $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ erfülle die äußere Kugelbedingung. Dann ist \mathbf{x}_0 ein regulärer Randpunkt.

Beweis

Für $n > 2$ definiert die Formel

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|^{n-2}}$$

eine Barrierenfunktion im Punkt $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$:

- w ist stetig auf $\overline{\Omega}$;
- w ist harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ und insbesondere superharmonisch in Ω ;
- $w(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} = 0$;
- Für $\mathbf{x} \in \overline{\Omega} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ ist $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| > r$ und daher $w(\mathbf{x}) > 0$.

Für $n = 2$ ist die entsprechende Barrierenfunktion $w(\mathbf{x}) = \log|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| - \log r$. \square

Bemerkung

Die äußere Kugelbedingung ist sehr restriktiv. Es gibt schwächere hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Barrierenfunktion.

Die Bedingung, dass ein Randpunkt regulär ist, ist eine **lokale** Bedingung.

Definition

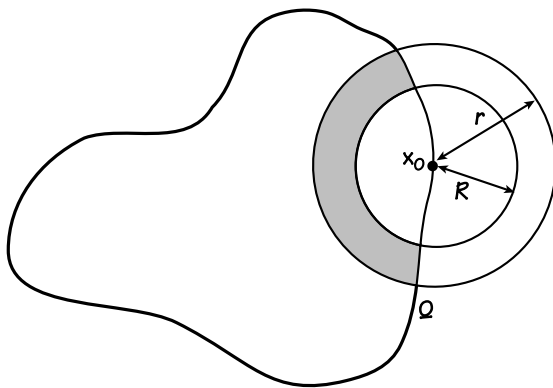
Eine Funktion w heißt **lokale Barrierenfunktion** im Punkt $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$, falls es eine offene Kugel $B_r(\mathbf{x}_0)$ gibt, so dass w eine Barrierenfunktion im Punkt $\mathbf{x}_0 \in \partial(\Omega \cap B_r(\mathbf{x}_0))$ ist.

Lemma

Es sei w eine lokale Barrierenfunktion im Punkt $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$. Dann existiert eine Barrierenfunktion in diesem Punkt.

Beweis

Es seien $R \in (0, r)$ und $m = \min\{w(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in (\overline{B}_r(\mathbf{x}) \setminus B_R(\mathbf{x})) \cap \overline{\Omega}\}$.

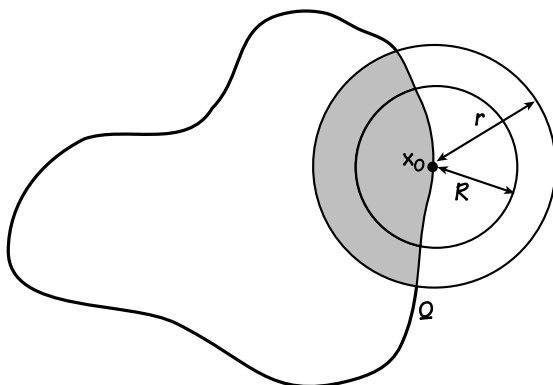


m ist das Minimum von w über die schraffierte Region. Insbesondere gilt hier $m \leq w$ und daher $\min(m, w) = m$.

Betrachte die durch die Formel

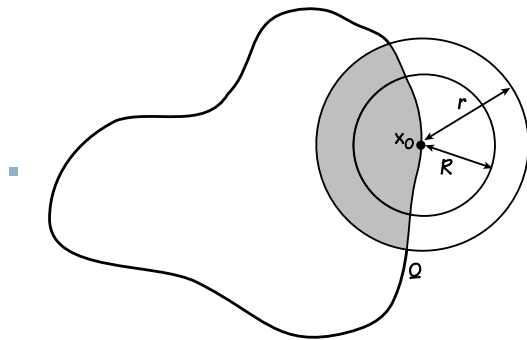
$$W(\mathbf{x}) = \begin{cases} \min(m, w(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \cap B_r(\mathbf{x}_0), \\ m, & \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \setminus B_r(\mathbf{x}_0) \end{cases}$$

definierte Funktion:

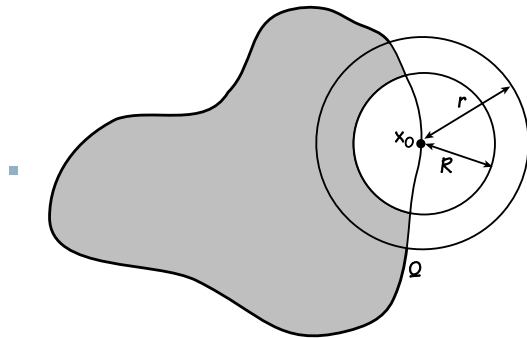


W ist $\min(m, w)$ in der schraffierten Region und m im nicht-schraffierten Teil von Ω . W ist stetig in Ω , da $\min(m, w) = m$ im Teil der schraffierten Region zwischen den beiden Kugeln ist.

Die Funktion W ist eine Barrierenfunktion im Punkt $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$. Sie ist nämlich stetig auf $\overline{\Omega}$, positiv auf $\overline{\Omega} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ und verschwindet im Punkt \mathbf{x}_0 . Außerdem ist sie superharmonisch in Ω :



In dieser Region ist W das Minimum zweier superharmonischer Funktionen und daher selbst superharmonisch.



In dieser Region ist W konstant (gleich m) und daher harmonisch.

□