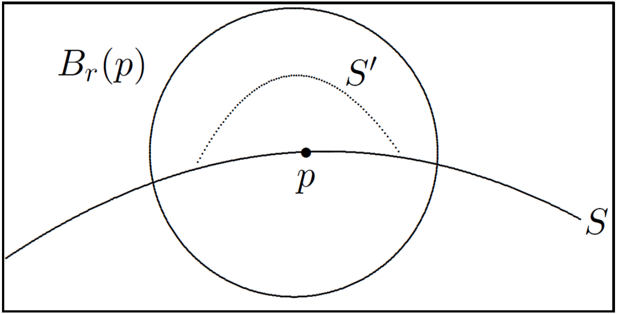
Das Dirichlet-Problem für die nichtparametrische Minimalflächengleichung

Miriam Gittrich

21.06.2012

Outline



S $\subset \mathbb{R}^3$ Minimalfläche

p $\in$ S, $B_r(p) \in \mathbb{R}^3$ mit genügend kleinem $r > 0$

$\Rightarrow \text{Area}_{B_r(p)}(S) \leq \text{Area}_{B_r(p)}(S')$

Das Dirichlet-Problem

Ziel: Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0 & \text{auf } \Omega, \\ f\Big|_{\partial\Omega} = \Phi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) Gebiet, Φ: $\partial\Omega \to \mathbb{R}$ Randfunktion)

Lösungsansatz: Minimieren des Flächenfunktionals

$$A_\Omega(f) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx$$

($f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f|_{\partial\Omega}=\Phi$)

Problem: z.B. C^k-Minimalfolgen ($k \geq 1$) konvergent?

$\Rightarrow$ Notwendig:

- A_Ω auf Räumen "verallgemeinerter Funktionen" studieren
- Regularität der Extremale beweisen

$\Rightarrow$ Zugang von Haar:

1. Lip(Ω) und Eigenschaften von A_Ω
2. Lipschitz-konstante Funktionen
3. Bounded-Slope-Condition

Lip(Ω) und Eigenschaften von A_Ω

Definition

(i) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig auf Ω
$\Leftrightarrow \exists$ Konstante $M \geq 0 : |\, f(x) - f(y) \,| \leq M \cdot |\, x - y \,|$
$\forall\, x,y \in \Omega$

(ii) $\text{Lip}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}$, beschränkt und Lipschitz-stetig$\}$

Satz von Rademacher

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig.

$\Rightarrow$ f fast überall differenzierbar und $|\, \nabla f \,| \leq \text{Lip}(f)$.

$\Longrightarrow A_\Omega\,(f)$ wohldefiniert für $f \in \text{Lip}(\Omega)$

Satz

(i) $C \subset$ Lip(Ω) konvexe Teilmenge
$\Rightarrow A_\Omega$ auf C streng konvex.

(ii) $f_m \to f$ gleichmäßig auf Ω, supLip(f_m) $< \infty$
$\Rightarrow A_\Omega(f) \leq \liminf_{m\to\infty} A_\Omega(f_m)$ (unterhalbstetig).

Beweis von (ii): $\dfrac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} \xrightarrow{h\to 0} \partial f_m$

$$\overset{\text{glm. L-stetig}}{\Longrightarrow} \left|\nabla f\right| \leq \liminf_{m\to\infty} \left|\nabla f\right|$$

$$\Rightarrow A_\Omega(f) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx$$

$$\leq \int \sqrt{1 + liminf |\nabla f_m|^2}\, dx = \liminf_{m\to\infty} A_\Omega(f_m)$$

Funktionen mit beschränkter Lipschitz-Konstante

Satz

$$\exists!\ \text{Minimalstelle } f_R \text{ von } A_\Omega \text{ in } \mathrm{Lip}_R(\Omega,\Phi):$$
$$A_\Omega(f_R) \leq A_\Omega(f) \qquad \forall\ f \in \mathrm{Lip}_R(\Omega,\Phi).$$

Beweisskizze:

(f_m) Minimalfolge in $\mathrm{Lip}_R(\Omega,\Phi) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (f_m)$ glm. beschränkt.
Satz von Arzelà-Ascoli $\Rightarrow \exists$ Teilfolge (f_m) und Funktion
$f \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $f_m \to f$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$, $f \in \mathrm{Lip}_R(\Omega,\Phi)$.
$A_\Omega(f) \leq \liminf_{m\to\infty} A_\Omega(f_m) = \inf_{Lip_R(\Omega,\Phi)} A_\Omega$.
$\Rightarrow$ Minimalstelle.

Satz

Ψ Lipschitz-Funktion, $\mathrm{Lip}(\Psi) \leq R$, $g_R \in \mathrm{Lip}_R(\Omega, \Psi)$ A_Ω-minimal.

(i) Vorausgesetzt, $\Phi \leq \Psi$ auf $\partial\Omega$
$\Rightarrow f_R \leq g_R$ auf $\overline{\Omega}$

(ii) Sei $\Phi \leq \Psi$ auf $\partial\Omega$ nicht vorausgesetzt
$\Rightarrow \sup_{x\in\overline{\Omega}} \mid f_R(x) - g_R(x) \mid \leq sup_{x\in\partial\Omega} \mid \Phi(x) - \Psi(x) \mid$

Beweis von (i):

$h_R := \min(f_R, g_R) \in \mathrm{Lip}_R(\Omega, \Psi)$.

$$\Rightarrow A_\Omega(f_R) \le A_\Omega(h_R) = \int_{[f_R \le g_R]} \sqrt{1+|\nabla f_R|^2}\, dx + \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1+|\nabla g_R|^2}\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1+|\nabla f_R|^2}\, dx \le \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1+|\nabla g_R|^2}\, dx.$$

Analog: $H_R := \max(f_R, g_R) \in \mathrm{Lip}_R(\Omega, \Psi)$.

$$\Rightarrow \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1+|\nabla g_R|^2}\, dx \le \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1+|\nabla f_R|^2}\, dx.$$

$$\Rightarrow A_\Omega(f_R) = A_\Omega(h_R).$$

$f_R = h_R = \min(f_R, h_R)$ eind. Minimalstelle in $\mathrm{Lip}_R\,(\Omega, \Psi)$.
$\Rightarrow f_R \le g_R$ auf Ω.

Da $\Phi \le \Psi$ auf $\partial\Omega$ $\quad\Rightarrow f_R \le g_R$ auf $\overline{\Omega}$.

Bounded-Slope-Condition

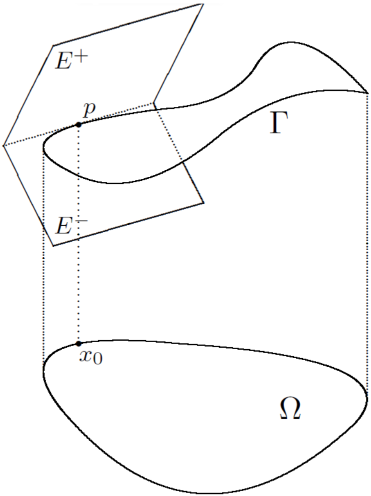
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und konvex, Φ: $\partial\Omega \to \mathbb{R}$ Randfunktion.

Definition

Randmannigfaltigkeit $\Gamma := \{(z, \Phi(z)) : z \in \partial\Omega\}$ erfüllt Bounded-Slope-Condition mit Konstante $K \geq 0$, wenn gilt:

$\exists$ zu jedem $p=(x_0,\Phi(x_0)) \in \Gamma$ affin-lin. Funktionen $L_p^\pm : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$L_p^\pm(x) = a^\pm\,(x\text{-}x_0) + \Phi(x_0)$, $a^\pm = a^\pm(p) \in \mathbb{R}^n$ mit:

(a) $L_p^-(x) \leq \Phi(x) \leq L_p^+(x)\ \forall\ x \in \partial\Omega$
(b) $|a^\pm| \leq K$.


E^+
p
Γ
E^-
x_0
Ω

Satz

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und konvex, Φ: $\partial\Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, B.S.C. mit $K \geq 0$ erfüllt.

$$\Rightarrow \forall\ R > K : \mathrm{Lip} f_R \leq K$$

Beweisskizze:
Vergleichsprinzip $\Rightarrow L^- \leq f_R \leq L^+$ auf $\overline{\Omega}$.
Für $x \in \overline{\Omega}$ bedeutet dies:

$$\begin{aligned} f_R(x) - f_R(x_0) &\leq L^+(x) - f_R(x_0) = L^+(x) - \Phi(x_0) \\ &= L^+(x) - L^+(x_0) \leq K\cdot|x - x_0|. \end{aligned}$$

Entsprechend: $f_R(x) - f_R(x_0) \geq -K\cdot|x - x_0|$.

$\Rightarrow |f_R(x) - f_R(y)| \leq K\cdot|x - y|\ \forall\ x \in \overline{\Omega},\ y \in \partial\Omega$.

Satz

Ω, Φ wie oben. Erfüllen Ω, Φ eine B.S.C.

$\Rightarrow \exists!$ f $\in$ Lip$(\Omega, \Phi) := \{$g $\in$ Lip(Ω): g$|\partial\Omega = \Phi\}$, s.d.

A_Ω(f):=$\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx \leq A_\Omega$(g) $\forall$ g $\in$ Lip(Ω, Φ).

<u>Beweisskizze</u>:
Wähle R $\geq$ K, betrachte $f_R \in \mathrm{Lip}_R(\Omega, \Phi)$.
Satz $\Rightarrow$ Lipf_R < R. $\Rightarrow$ $f_R + \varepsilon\cdot(f - f_R) \in \mathrm{Lip}_R(\Omega, \Phi)$ für g $\in$ Lip(Ω, Φ) bel., $|\varepsilon| \ll 1$.
$\Rightarrow$ A$\Omega(f_R) \leq$ A$\Omega(f_R + \varepsilon\cdot(f - f_R))$.
$\Rightarrow$ ... $\Rightarrow \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla g|^2}\, dx \geq \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx$.

$\Rightarrow$ Lassen wir also Lipschitz-Graphen als Minimalflächen zu, so finden wir in dieser erweiterten Klasse eine Fläche kleinsten Inhalts.